文章编号 1672-6634(2018)01-0015-06 **DOI** 10.19728/j.issn1672-6634.2018.01.003

非线性发展方程非局部对称及精确解①

辛祥鹏

(聊城大学 数学科学学院,山东 聊城 252059)

摘 要 应用非线性发展方程的 Lax 对,研究了方程的非局部对称,给出了非局部对称的一般构造方法. 由于非局部对称不能直接用于构造方程的精确解,因此通过引入新变量的方式将非局部对称局部化. 最后利用这种方法研究了 KdV 方程,Boussinesq 方程,AKNS 系统的非局部对称,并构造了 KdV 方程的新的精确解.

关键词 非线性发展方程;Lax 对;非局部对称;局部化

中图分类号 O175.2 **文献标识码** A

0 引言

近些年来,非线性科学已经蓬勃发展于各个领域,因此在研究过程中无法避免碰到各种各样的非线性方程,对于如何求解这些方程无疑成为非线性科学的关键所在. 现在已经发展了许多有效的求解方法,如反散射变换法[1-3]、经典和非经典李群方法[4-10]、Hirota 双线性方法[11-13]、CK 直接法[14,15]、有理函数展开法[16-18]、Painlevé 截断法[19]等.

上述求解方法中,对称方法无疑是一种有效的方法. 上世纪 80 年代,数学物理学家 P. J. Olver 首次提出了非局部对称的概念,并作出了一些开创性工作,对于寻找一些具有重要物理意义的精确解有着重要的推动作用. 但是寻找非线性发展方程的非局部对称是非常困难的工作,即使找到也很难用于求解非线性发展方程. 加拿大著名学者 G. W. Bluman [20-22] 等通过构造势系统的方式构造了很多非线性方程的势对称,这种构造势对称具有普适性,但是作者很少利用势对称来构造精确解. F. Galas[23] 等利用赝势也构造了非局部对称,而且给出了如何利用非局部对称构造精确解的方法,因此有着巨大的推动作用. 我国学者楼森岳、陈勇[24,25]等也在非局部对称方面做出了很多优秀的成果,他们利用 Daboux 变换及 Bäcklund 变换构造很多非线性发展方程的非局部对称,并构造了很多有意义的精确解. 本文作者也给出了利用非线性发展方程的 Lax 对构造非局部对称的方法[26],并且利用此方法构造了方程的非局部对称.

本文将给出另外一种利用 Lax 对或者其他辅助系统直接构造非局部对称的方法,此方法比以前的方法更直接有效,而且计算量小. 文章结构如下,第一部分将给出构造方法,第二部分利用此方法构造几类方法的非局部对称,第三部分利用非局部对称构造方程的精确解,最后给出总结.

1 非局部对称构造方法

首先考虑一般的 n 阶非线性发展方程(组)

$$F_z(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}^{(n)})=0,z=1,2,\cdots,l, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{y}=(u_1,u_2,\cdots,u_\alpha)$ 表示 α 个因变量, $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_\beta)$ 表示 β 个空间变量, $\boldsymbol{y}^{(n)}$ 表示 $\boldsymbol{y}$ 对变量 $\boldsymbol{x}$、

① 收稿日期:2018-01-20
基金项目:国家自然科学基金项目(11505090,11171041);山东省优秀中青年科学家奖励基金(BS2015SF009)资助
通讯作者:辛祥鹏,男,汉族,博士,讲师,研究方向:微分方程的精确解,E-mail:xinxiangpeng@lcu.edu.cn.

t 的各阶导数项,此方程具有一般性.

假设非线性发展方程(组)(1)有下面形式的 Lax 对,或者其他形式的辅助系统,

$$\boldsymbol{G}_\gamma(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}^{(n)},\varphi,\varphi_x,\varphi_t,\cdots,\lambda)=0,\gamma=1,2,\cdots, \tag{2}$$

其中 φ 为谱函数,λ 为谱参数,此辅助系统包含很多种类,可以是方程的 Lax 对,势系统,赝势,Bäcklund 变换等,下面给出构造非局部对称的方法.

第 1 步:假设方程(1)的对称具有下面形式

$$\sigma_\alpha=\boldsymbol{X}_\alpha(x_\beta,\boldsymbol{y}_\alpha,\varphi,\varphi_x,\varphi_t,\cdots)\frac{\partial \boldsymbol{y}_\alpha}{\partial \boldsymbol{x}_\beta}-\boldsymbol{U}_\alpha(x_\beta,\boldsymbol{y}_\alpha,\varphi,\varphi_x,\varphi_t,\cdots). \tag{3}$$

第 2 步:利用李群方法构造方程(1)的线性化形式,即方程对称满足的形式.

第 3 步:将第一步的结果带入到第二步的结果里,然后利用方程(1)及(2)消去非独立项,使之得到一系列独立方程.

第 4 步:令 $\boldsymbol{y}$ 的各阶导数项的系数为零,得到决定方程组,求解方程组即得到方程的对称.

在上述过程中需要特别注意的是第 1 步,在假设对称形式的时候与一般的对称有着很大的差别,除了依赖于原方程的自变量和因变量之外,还需要依赖于辅助系统中的谱函数,以及谱函数的导数项,这样才有可能得到非局部对称. 还需要注意的是 $\boldsymbol{X}_\alpha,\boldsymbol{U}$ 中谱函数阶数的选取,需要观察辅助系统中等式左端项,选择不当,只会增加计算量,而不会出现新的结果. 下面将利用此方法构造几个方程的非局部对称.

2 几类非线性发展方程的非局部对称

2.1 KdV 方程的非局部对称

首先考虑最常见的 KdV 方程,此方程是研究浅水中小振幅长波运动时发现的一种单向运动浅水波偏微分方程,KdV 方程在物理学的许多领域都有应用,例如等离子体磁流波、离子声波、非谐振晶格振动、低温非线性晶格声子波包的热激发、液体气体混合物的压力表等,KdV 方程形式如

$$u_t+6uu_x+u_{xxx}=0, \tag{4}$$

方程(4)具有下面著名的 Lax 对形式

$$\begin{cases}\varphi_{xx}=-u\varphi-\lambda\varphi,\\ \varphi_t=-4\varphi_{xxx}-6u\varphi_x-3\varphi u_x,\end{cases} \tag{5}$$

由经典对称方法可以得到方程(4)的对称满足方程为

$$\sigma_t+6\sigma u_x+6u\sigma_x+\sigma_{xxx}=0. \tag{6}$$

下面将假设对称满足的形式,通过观察(5),假设无穷小为 $(x,t,u,\varphi,\varphi_x)$ 的任意函数,即

$$\sigma=\boldsymbol{X}(x,t,u,\varphi,\varphi_x)u_x+\boldsymbol{T}(x,t,u,\varphi,\varphi_x)u_t-\boldsymbol{U}(x,t,u,\varphi,\varphi_x), \tag{7}$$

将(7)式带入到(6)中,然后利用方程(4)(5)消掉 $u_t,\varphi_{xx},\varphi_t$,得到的式子非常复杂,在这里就省略了. 利用刚才得到的式子,令 u 各阶导数项为零,得到一系列式子,称为决定方程组,求解决定方程组,得到,

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{X}(x,t,u,\varphi,\varphi_x)=6c_4t+\frac{c_1}{3}x+c_5,\boldsymbol{T}(x,t,u,\varphi,\varphi_x)=c_1t+c_2,\\&\boldsymbol{U}(x,t,u,\varphi,\varphi_x)=-\frac{2}{3}c_1u+c_3\varphi\varphi_x+c_4.\end{aligned} \tag{8}$$

将(8)带入(7)就得到了方程(4)的对称,即

$$\sigma=(6c_4t+\frac{c_1}{3}x+c_5)u_x+(c_1t+c_2)u_t+\frac{2}{3}c_1u-c_3\varphi\varphi_x-c_4, \tag{9}$$

观察(9)式可以看到,如果令 $c_3=0$,则得到的结果为 KdV 方程的一般 Lie 点对称,但是当 $c_3\neq 0$ 时,则是 KdV 方程的非局部对称,因为对称中包含的谱函数及谱函数的导数项.

2.2 Boussinesq 方程的非局部对称

由于 KdV 方程比较简单,而且具有很好的性质,不足以验证方法的有效性,下面我们给出一个较为复杂的方程,著名的 Boussinesq 方程

$$u_{tt}+(u^2)_{xx}+\frac{1}{3}u_{xxxx}=0, \tag{10}$$

方程(10)有下面形式的 Lax 对

$$\begin{aligned}\psi_{xxx}&=-\frac{3}{2}u\psi_x-(\frac{3}{4}u_x+\frac{3}{4}\partial_x^{-1}u_t)\psi,\\ \psi_t&=-\psi_{xx}-u\psi,\end{aligned} \tag{11}$$

其中 $\partial_x^{-1}u_t=\int u_t\mathrm{d}x$. 但是，通过计算可以知道，如果通过方程(10)及其 Lax 对(11)是不存在非局部对称的，仅存在一般 Lie 点对称. 因此需要再增加辅助方程，因此引入方程(10)的伴随 Lax 对，

$$\begin{aligned}\varphi_{xxx}&=-\frac{3}{2}u\varphi_x-(\frac{3}{4}u_x-\frac{3}{4}\partial_x^{-1}u_t)\varphi,\\ \varphi_t&=\varphi_{xx}+u\varphi,\end{aligned} \tag{12}$$

通过计算(12)也是方程(10)的 Lax 对. 通过计算可以知道，方程(10)对称满足的方程为

$$\sigma_{tt}-4\sigma_xu_x-2\sigma u_{xx}-2u\sigma_{xx}+\frac{1}{3}\sigma_{xxxx}=0. \tag{13}$$

下面假设无穷小生成元的形式，与 KdV 方程的假设不同，由于引入了伴随 Lax 对，因此假设无穷小为 $(x,t,u,\psi,\psi_x,\psi_{xx},\varphi,\varphi_x,\varphi_{xx})$ 的任意函数，即

$$\begin{aligned}\sigma=\boldsymbol{X}(x,t,u,\psi,\psi_x,\psi_{xx},\varphi,\varphi_x,\varphi_{xx})u_x+\boldsymbol{T}(x,t,u,\psi,\psi_x,\psi_{xx},\varphi,\varphi_x,\varphi_{xx})u_t\\ -\boldsymbol{U}(x,t,u,\psi,\psi_x,\psi_{xx},\varphi,\varphi_x,\varphi_{xx}),\end{aligned} \tag{14}$$

把(14)式带入到(13)，并利用方程(10)及 Lax 对(11)，伴随 Lax 对(12)，通过复杂的计算，可以得到方程的非局部对称为

$$\sigma=(\frac{1}{2}c_1x+c_3)u_x+(c_1x+c_2)u_t+(c_1u-c_4(\psi\varphi)x). \tag{15}$$

通过观察可以得到下面两点结论

(1) 得到的对称形式既包含一般的 Lie 点对称，也包含非局部对称.

(2) 对称中无穷小生成元的假设与结果可能有所差别，比如假设系数为 (ψ_{xx},φ_{xx}) 的函数，但是结果中仅为谱函数的一阶导数，但是我们要求还是要假设为二阶导数，因为要与 Lax 中的形式对应.

2.3 AKNS 系统的非局部对称

除了可以计算方程的非局部对称，还可以计算方程组形式的对称，下面研究 Ablowitz-Kaup-Newell-Segur(AKNS)系统的非局部对称

$$\begin{aligned}u_t&=-\mathrm{i}u_{xx}+2\mathrm{i}u^2v,\\ v_t&=\mathrm{i}v_{xx}-2\mathrm{i}uv^2,\end{aligned} \tag{16}$$

其中，i 表示虚数单位，即 $\mathrm{i}^2=-1$. 方程组(16)具有下面矩阵形式的 Lax 对，

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\varphi_{1x}\\ \varphi_{2x}\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}-\mathrm{i}\lambda & u\\ v & \mathrm{i}\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix},\\ \begin{pmatrix}\varphi_{1t}\\ \varphi_{2t}\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}2\mathrm{i}\lambda^2+\mathrm{i}uv & 2\mathrm{i}\lambda u-\mathrm{i}u_x\\ -2\lambda v+\mathrm{i}v_x & -2\mathrm{i}\lambda^2-\mathrm{i}uv\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix},\end{aligned} \tag{17}$$

计算过程相似，省略计算过程可以得到下面形式的结果，其中 u 的对称为

$$\sigma^u=(c_1t+c_3x+c_2)u_x+(2c_3t+c_4)u_t+\frac{1}{2}(c_1\mathrm{i}x+2c_6+4c_3)+c_5\varphi_1^2, \tag{18}$$

v 的对称为

$$\sigma^v=(c_1t+c_3x+c_2)v_x+(2c_3t+c_4)v_t-\frac{1}{2}(c_1\mathrm{i}x+2c_6)-c_5\varphi_2^2. \tag{19}$$

通过上面的例子可以看出，此种方法是非常有效的，而且避免了以前方法需要进行复杂的延拓计算，即提高了效率，而且不容易出错.

3 非局部对称的应用

Lie 点对称在求非线性发展方程的精确解方面的作用已经不言而喻了，但是非局部对称在求解中的应用才是这几年有所发展. 因为非局部对称不像点对称那样可以直接对方程进行约化求解，非局部对称中包含非局部变量，有的还包含非局部变量的导数项，使得方程和辅助系统不封闭，如何建立一个封闭系统是解决问题的关键. 为了解决这个问题，很多学者做出了研究，F Galas 通过引入赝势函数的方法将一些系统封闭化，我国学者楼森岳，陈勇等也通过引入新变量系统的方法构建新系统，使之封闭化，下面我们研究一类非局部系统，将非局部对称用于求解方程中来.

下面构造 KdV 方程的精确解，首先令(8)式中 $c_1=c_2=c_4=0, c_3=1$，则 KdV 方程具有下面形式的非局部对称

$$\sigma=\varphi\varphi_x, \tag{20}$$

因为对称(20)中包含谱函数 φ 的导数项，因此引入一个新的辅助变量

$$\psi=\varphi_x, \tag{21}$$

因此，对称变为

$$\sigma=\varphi\psi, \tag{22}$$

为了计算变量 ψ 和 φ 的局域对称，需要引进另外一个变量 $f\equiv f(x,t)$，而新变量 f 满足

$$\begin{aligned} f_x&=-\frac{1}{4}\varphi^2,\\ f_t&=-\frac{u}{2}\varphi^2-2\lambda\varphi^2-\varphi_x^2. \end{aligned} \tag{23}$$

通过验证，可以知道，方程(4)(5)(21)(23)组成了一个封闭的系统，则通过一般的 Lie 群方法求此系统的对称，假设

$$\begin{aligned} \sigma^u&=\boldsymbol{X}(x,t,u,\varphi,\psi,f)u_x+\boldsymbol{T}(x,t,u,\varphi,\psi,f)u_t-\boldsymbol{U}(x,t,u,\varphi,\psi,f),\\ \sigma^\varphi&=\boldsymbol{X}(x,t,u,\varphi,\psi,f)\varphi_x+\boldsymbol{T}(x,t,u,\varphi,\psi,f)\varphi_t-\boldsymbol{P}(x,t,u,\varphi,\psi,f),\\ \sigma^\psi&=\boldsymbol{X}(x,t,u,\varphi,\psi,f)\psi_x+\boldsymbol{T}(x,t,u,\varphi,\psi,f)\psi_t-\boldsymbol{Q}(x,t,u,\varphi,\psi,f),\\ \sigma^f&=\boldsymbol{X}(x,t,u,\varphi,\psi,f)f_x+\boldsymbol{T}(x,t,u,\varphi,\psi,f)f_t-\boldsymbol{F}(x,t,u,\varphi,\psi,f), \end{aligned} \tag{24}$$

通过复杂的计算可以得到

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}(x,t,u,\varphi,\psi,f)&=\frac{-12\lambda t+x}{3}c_1+c_4,\\ \boldsymbol{T}(x,t,u,\varphi,\psi,f)&=c_1t+c_2,\\ \boldsymbol{U}(x,t,u,\varphi,\psi,f)&=\frac{-12u-2\lambda}{3}c_1+c_3\varphi\varphi_x,\\ \boldsymbol{P}(x,t,u,\varphi,\psi,f)&=(c_3f+c_5)\varphi,\\ \boldsymbol{Q}(x,t,u,\varphi,\psi,f)&=-c_3\frac{\varphi^3}{4}+(c_3f-c_1\frac{1}{3}+c_5)\varphi_x,\\ \boldsymbol{F}(x,t,u,\varphi,\psi,f)&=c_3f^2+\frac{c_1+6c_5}{3}f+c_6, \end{aligned} \tag{25}$$

其中 $c_i(i=1,\cdots,6)$ 为任意常数. 由(25)式可以看出，对称(8)仅仅是(25)的特殊情况，由此也判定系统是封闭的.

下面构造 KdV 方程的群不变解，为了对方程进行约化，需要求解不变曲面条件

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\frac{-12\lambda t+x}{3}c_1+c_4}=\frac{\mathrm{d}t}{c_1t+c_2}=\frac{\mathrm{d}u}{\frac{-12u-2\lambda}{3}c_1+c_3\varphi\varphi_x}=\frac{d\varphi}{(c_3f+c_5)\varphi}\\ =\frac{\mathrm{d}\psi}{-c_3\frac{\varphi^3}{4}+(c_3f-c_1\frac{1}{3}+c_5)\varphi_x}=\frac{\mathrm{d}f}{c_3f^2+\frac{c_1+6c_5}{3}f+c_6}. \end{aligned} \tag{26}$$

为了 得到方程的精确解,令 $c_1 \neq 0, c_2 = c_4 = c_5 = 0$,则求解(26)得到

$$
\begin{aligned}
u &= \lambda + t^{-\frac{2}{3}}(\boldsymbol{U}(\xi) + \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}F(\xi)}[\frac{4c_3}{3c_1}\boldsymbol{P}(\xi)\boldsymbol{Q}(\xi)\tanh(\ln(t) + \boldsymbol{F}(\xi)) \\
&\quad - 2\,\frac{c_3^2}{9c_1^2}\boldsymbol{Q}(\xi)4\mathrm{sech}(\ln(t) + \boldsymbol{F}(\xi))]), \\
\varphi &= t^{-\frac{1}{6}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}F(\xi)}\boldsymbol{P}(\xi)\mathrm{sech}(\ln(t) + \boldsymbol{F}(\xi)), \\
\psi &= \frac{1}{3c_1}t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}F(\xi)}\mathrm{sech}(\ln(t) + \boldsymbol{F}(\xi))(3c_1\boldsymbol{Q}(\xi) + c_3\boldsymbol{P}(\xi)3\tanh(\ln(t) + \boldsymbol{F}(\xi))), \\
f &= -\frac{c_1}{2c_3}(1 + 6\tanh(\ln(t) + \boldsymbol{F}(\xi))),
\end{aligned}
\tag{27}
$$

其中

$$
\boldsymbol{U}(\xi) = \frac{\xi}{6} + 2\boldsymbol{F}_\xi^2 + \frac{\boldsymbol{F}_{\xi\xi}^2}{2\boldsymbol{F}_\xi^2} - \frac{1}{2\boldsymbol{F}_\xi}, \boldsymbol{P}(\xi) = (-3\,\frac{c_1}{c_3}\boldsymbol{F})\ 1/2\mathrm{e}^{1/6F}, \boldsymbol{Q}(\xi) = \boldsymbol{P}_\xi \mathrm{e}^{1/3F} + \frac{c_3}{18c_1}\boldsymbol{P}^3, \tag{28}
$$

$\boldsymbol{F}$ 满足方程

$$
6\boldsymbol{F}_{\xi\xi\xi}\boldsymbol{F}_\xi + 6\boldsymbol{F}_\xi - 2\xi\boldsymbol{F}_\xi^2 - 12\boldsymbol{F}_\xi^4 - 9\boldsymbol{F}_{\xi\xi}^2 = 0. \tag{29}
$$

由上述条件可知,只要求出 $\boldsymbol{F}$ 的解,则 可以得到原方程的解,下面给出几类 $\boldsymbol{F}$ 的解.

(1) 有理形式解. 可以验证(29)有解 $\boldsymbol{F} = \ln(\xi^3 + 12)$,则带入到(28)及(27)则得到 KdV 方程的有理形式解.

(2) 特殊函数解. 通过求解得到(29)的解为

$$
\boldsymbol{F} = \frac{5}{2}\ln(\frac{2}{3}) + \frac{3}{2}\ln(\boldsymbol{J}^2(-\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{6}}{9}\xi^{\frac{3}{2}}) - \xi^2\boldsymbol{J}^2(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{6}}{9}\xi^{\frac{3}{2}})),
$$

其中 $\boldsymbol{J}^2(n, \eta)$ 为第一类贝塞尔函数. 可以计算,KdV 方程的解为

$$
u = \lambda - \frac{\xi}{6t} - \frac{8\sqrt{6}\xi^{3/2}\boldsymbol{J}_1\boldsymbol{J}_2}{3\sqrt{t}(4\xi^2(\boldsymbol{J}_1^2 + \boldsymbol{J}_2^2) - 3\cdot 18^{1/3})} + \frac{32\xi^2\boldsymbol{J}_1^4}{(4\xi^2(\boldsymbol{J}_1^2 + \boldsymbol{J}_2^2) - 3\cdot 18^{1/3})^2},
$$

其中 $\xi = x + 6\lambda t$.

由于(26)中含有很多任意常数,因此对于不同的常数的选取可以得到不同的不变量,因此可以得到不同形式的群不变解,在这里就不在一一列举.

4 结论

本文给出了构造非线性发展方程的非局部对称的方法,通过具体例子验证了这种方法更具有高效性,可以不需要计算复杂的延拓方程,可以直接得到方程的非局域对称形式. 利用此方法研究了多个可积系统,得到它们的非局部对称. 当然不仅仅只对这几个方程有效,因为方法的普适性,可以对广大具有 Lax 对,势系统,赝势等辅助系统的方程都可以,因此对于研究方程的物理性质有着重要的作用. 文中还对求得的非局部对称进行应用,通过引入新变量的方式,将不封闭的系统封闭化,进而通过研究封闭系统的 Lie 对称,来研究原系统的非局部对称,方法直接而有效,因此可以推广到其他非线性系统,对于研究这些系统的物理性质有着重理论依据.

参 考 文 献

[1] Ablowitz M J, Segur H. Solitons and the Inverse Scattering Transform[M]. Philadelphia:Siam,1981.

[2] Novikov S. Theory of Solitons: the Inverse Scattering Method[M]. New York:Springer,1984.

[3] Ablowitz M J,Clorkson P A. Solitons,Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering[M]. Cambridge: Cambridge University, Press,1991.

[4] Lie S. Uber die Integration durch bestimmte Integrale von einer Klasse linearer partieller Differential gleichungen[J]. Arch Math, 1881, 6:328-332.

[5] Ovsiannikov L V. Group Analysis of Differential Equations[M]. New York: Academic, 1982.

[6] Olver P J. Applications of Lie Groups to Differential Equations[M]. Berlin: Springer, 1986.

[7] Ibragimov N H. Transformation Groups Applied to Mathematical Physics[M]. Boston MA: Reidel, 1985.

[8] Bluman G W, Kumei S. Symmetries and Differential Equations[M]. New York: Springer-Verlag, 1989.

[9] Dong Z Z, Huang F, Chen Y. Symmetry reductions and exact solutions of the two-Layer model in atmosphere[J]. Z Naturforsch, 2011, 66a: 75-86.

[10] Hu X R, Huang F, Chen Y. Symmetry reductions and exact solutions of the (2+1)-dimensional navier-stokes equations[J]. Z Naturforsch, 2010, 65a: 1-7.

[11] Hirota R. The Direct Method in Soliton Theory[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

[12] Hirota R. Exact solution of the KdV equation for multiple collisions of sollitons[J]. Phys Rev Lett, 1971, 27: 1192-1194.

[13] 李翊神. 孤子与可积系统[M]. 上海:上海科技教育出版社, 1999.

[14] Clarkson P A. Nonclassical symmetry reductions of the Boussinesq equation[J]. Chaos, Soliton Fract, 1995, 5: 2261-2301.

[15] Lou S Y, Ma H C. Non-Lie symmetry groups of (2+1)-dimensional nonlinear systems obtained from a simple direct method[J]. J Phys A: Math Gen, 2005, 38: L129.

[16] Parkes E J, Duffy B R. An automated tanh-function method for finding solitary wave solutions to non-linear evolution equations[J]. Comput Phys Commun, 1996, 98: 288-300.

[17] 范恩贵. 可积系统与计算机代数[M]. 北京:科学出版社, 2004.

[18] Fan E G. Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations[J]. Phys Lett A, 2000, 277: 212-218.

[19] Weiss J, Tabor M, Carnevale G. The Painlevé property for partial differential equations[J]. Journal of Mathematical Physics, 1983, 24(3): 522-526.

[20] Bluman G W, Cheviakov A F, Anco S C. Applications of Symmetry Methods to Partial Differential Equations[M]. New York: Springer, 2010.

[21] Bluman G W, Reid G J, Kumei S. New classes of symmetries for partial differential equations[J]. J Math Phys, 1988, 29: 806-810.

[22] Bluman G W, Temuerchaolu, Sahadevan R. Local and nonlocal symmetries for nonlinear telegraph equation[J]. J Math Phys, 2005, 46: 023505.

[23] Galas F. New non-local symmetries with pseudopotentials[J]. J Phys A: Math Gen, 1992, 25: L981-L986.

[24] Lou S Y, Hu X R, Chen Y. Nonlocal symmetries related to Backlund transformation and their applications[J]. J Phys A: Math Theor, 2012, 45: 155-209.

[25] Hu X R, Lou S Y, Chen Y. Explicit solutions from eigenfunction symmetry of the Korteweg-deVries equation[J]. Phys Rev E, 2012, 85: 056607.

[26] Xin X P, Chen Y. A method to construct the nonlocal symmetries of nonlinear evolution equations[J]. Chinese Physics Letters, 2013, 30(10): 100202.

Non-local Symmetries and Exact Solutions of Nonlinear Development Equations

XIN Xiang-peng

(School of Mathematical Sciences, Liaocheng University, Liaocheng 252059, China)

Abstract In this paper, the nonlocal symmetry of the equations is studied by using the Lax pairs of nonlinear development equations, and a general construction method of nonlocal symmetry is given. Because nonlocal symmetries can not be used to solve the exact solution of the equations directly, therefore, the nonlocal symmetries are localized by introducing new variables. This method is used to study nonlocal symmetries of the KdV equation, Boussinesq equation and AKNS system. Finally, the new exact solutions of KdV equation are constructed.

Key words nonlinear development equation; lax pair; non local symmetry; localization