第 31 卷 第 2 期
2018 年 6 月

聊城大学学报(自然科学版)
Journal of Liaocheng University(Nat. Sci.)

Vol. 31 No. 2
Jun. 2018

文章编号 1672-6634(2018)02-0066-06 **DOI** 10.19728/j.issn1672-6634.2018.02.009

涉及双变量 Hermite 多项式的新二项式定理及应用[①]

孟祥国

(聊城大学 物理科学与信息工程学院、山东省光通信科学与技术重点实验室,山东 聊城 252059)

摘 要 利用量子光学方法,将普通的二项式定理推广到涉及双变量 Hermite 多项式情况,解析推导出几个新的广义二项式定理及其推论. 作为应用,解析证明多光子扣除压缩态 $a^m b^n e^{sa^+b^+ + ra^+ + tb^+}|00\rangle$ 等价于实验上易于调控的非高斯纠缠信息源,即以双变量 Hermite 多项式为权重的非高斯量子态;而且发现自旋相干态的 Wigner 函数恰好正比于 Laguerre 多项式.

关键词 新二项式定理;纠缠态表象;有序算符内积分法;Wigner 函数

中图分类号 O413.1 **文献标识码** A

在数学物理学中,二项式定理(或二项式展开)[1,2]作为一个基础的代数定理被广泛应用. 根据定理,多项式 $(x+y)^n$ 被展成 $x^k y^{n-k}$ 的有限求和表示,即

$$(x+y)^n = \sum \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \tag{1}$$

式中 $\binom{n}{k}$ 被称为二项式系数. 最近,在处理量子力学坐标算符 $X^n = (a+a^\dagger)^n/\sqrt{2^n}$ 的级数展开时,人们感到有必要去发展二项式定理,这是因为玻色湮灭算符 a 和产生算符 a^+ 不对易,即 $[a,a^+]=1$,这使得

$$X^n = \frac{(a+a^+)^n}{\sqrt{2^n}} \neq \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=0}^{n} a^k a^{+n-k}. \tag{2}$$

解决此问题的方法之一就是利用坐标算符的完备关系

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \,|x\rangle\langle x| = 1, \quad X|x\rangle = x|x\rangle, \tag{3}$$

以及对狄拉克 ket-bra 算符能够直接进行积分的有序算符内积分方法[3,4],可导出

$$X^n = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x x^n |x\rangle\langle x| = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\pi}} x^n \,\mathrm{e}^{-(x-X)^2} = \left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^n :H_n(\mathrm{i}X):, \tag{4}$$

式中 $H_n(\cdot)$ 为单变量 Hermite 多项式[5,6],符号 $::$ 指的是正规排序(即所有产生算符都在湮灭算符的左边,且在符号 $::$ 内产生算符和湮灭算符是对易的). 在本文中,我们引入发展二项式定理的另一种方法,即将双变量 Hermite 多项式 $H_{m-l,n-k}(x,y)$ 插入到两个普通二项展开式的直积

$$\sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} \tau^{m-l} q^l \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sigma^{n-k} p^k, \tag{5}$$

这直接导致一个新的广义二项式

$$\sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} \tau^{m-l} q^l \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sigma^{n-k} p^k H_{m-l,n-k}(x,y), \tag{6}$$

式中 $H_{m-l,n-k}(x,y)$ 扮演着使两模之间发生纠缠的角色. 为了导出式(6)中的结果,我们先给出双变量

---

① 收稿日期:2018-05-20

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11347026)和山东省自然科学基金(ZR2016AM03、ZR2017MA011)

通讯作者:孟祥国,男,汉族,博士,副教授,研究方向:高等量子力学及其应用、量子光学与量子信息等, E-mail:mengxiangguo1978@sina.com.

Hermite 多项式 $H_{m,n}(x,y)$ 的定义

$$H_{m,n}(x,y)=\sum_{l=0}^{\min(m,n)}\frac{(-)^l n!m!}{l!(m-l)!(n-l)!}x^{m-l}y^{n-l} \tag{7}$$

和产生函数

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{t^m t'^n}{m!n!}H_{m,n}(x,y)=\exp(-tt'+tx+t'y), \tag{8}$$

或者

$$H_{m,n}(x,y)=\frac{\partial^{m+n}}{\partial t^m\partial t'^n}\exp(-tt'+tx+t'y)\mid_{t=t'=0}. \tag{9}$$

双变量 Hermite 多项式在研究双粒子纠缠态方面非常有用. 例如，双粒子连续变量纠缠态[7,8]

$$|\eta\rangle=\exp\left(-\frac{|\eta|^2}{2}+\eta a^\dagger-\eta^* b^\dagger+a^\dagger b^\dagger\right)|00\rangle,\quad \eta=\eta_1+\mathrm{i}\eta_2. \tag{10}$$

这里 $[b,b^+]=1$，(b,b^+) 为另一对玻色算符，它在双模 Fock 空间中展开为

$$|\eta\rangle=e^{-|\eta|^2/2}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(-)^n H_{m,n}(\eta,\eta^*)}{\sqrt{m!n!}}|m,n\rangle, \tag{11}$$

其中 $|m,n\rangle$ 为双模 Fock 态[9-11]，态 $|\eta\rangle$ 为相互对易算符 (Q_a-Q_b) 和 (P_a+P_b) 的本征态，其相应的本征值分别为 $\sqrt{2}\eta_1$ 和 $\sqrt{2}\eta_2$，Q_i 和 P_i 分别是 $i(i=a,b)$ 模的坐标算符和动量算符. 进一步，通过推广式(6)，我们有另一个形式更为复杂的二项式定理，即

$$\sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\binom{m}{l}\binom{n}{k}f^l g^k H_{l,k}(\mu,v)H_{m-l,n-k}(x,y), \tag{12}$$

由式(6)和(12)可见，由于双变量 Hermite 多项式的存在，这两个二项式求和变得非常复杂，以至于采用纯粹的数学方法是难以解决的. 因此，本文采用量子光学方法，并充分利用有序算符内积分技术和连续变量纠缠态表象去计算新的二项式定理.

1　引理

为了推导出新的二项式定理，首先给出算符 $a^{\dagger l}a^k$ 的反正规表示，即

$$a^{\dagger l}a^k=\vdots H_{l,k}(a^\dagger,a)\vdots, \tag{13}$$

式中符号 $\vdots\ \vdots$ 代表反正规排序，其排序规则与正规排序恰好相反.
注意到 a 和 $a^\dagger$ 在符号 $\vdots\ \vdots$ 内对易，并利用式(8)，我们有

$$\sum_{i,k=0}^{\infty}\frac{\lambda^l\sigma^k}{l!k!}a^{\dagger l}a^k=\mathrm{e}^{\lambda a^\dagger}\mathrm{e}^{\sigma a}=\mathrm{e}^{\sigma a}\mathrm{e}^{\lambda a^\dagger}\exp[\lambda a^\dagger,\sigma a]=\vdots\mathrm{e}^{\lambda a^\dagger+\sigma a-\lambda\sigma}\vdots=\sum_{l,k=0}^{\infty}\frac{\lambda^l\sigma^k}{l!k!}\vdots H_{l,k}(a^\dagger,a)\vdots. \tag{14}$$

通过比较式(14)中 $\lambda^l\sigma^k$ 的系数，证明了式(13)成立.

2　涉及 $H_{m-l,n-k}(x,y)$ 的推广二项式定理

下面我们推导出式(6)中涉及 $H_{m-l,n-k}(x,y)$ 的求和. 为此，将反正规乘积算符 $\vdots H_{m-l,n-k}(a^+,a)\vdots$ 代替式(6)中的 $H_{m-l,n-k}(x,y)$，并利用式(13)中的算符关系式，可得到

$$\begin{aligned}&\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}\tau^{m-l}q^l\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sigma^{n-k}p^k\vdots H_{m-l,n-k}(a^\dagger,a)\vdots\\&=\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}\tau^{m-l}q^l\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sigma^{n-k}p^k:a^{\dagger m-l}a^{n-k}:\\&=:(q+\tau a^\dagger)^m(p+\sigma a)^n:.\end{aligned} \tag{15}$$

上式计算中利用了正规乘积符号 : : 内湮灭算符 a 和产生算符 a^+ 的对易性. 进一步，构造如下求和

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{t^m s^n}{m!n!}:(q+\tau a^\dagger)^m(p+\sigma a)^n:=\mathrm{e}^{t(q+\tau a^\dagger)}\mathrm{e}^{s(p+\sigma a)}. \tag{16}$$

利用 Baker-Hausdorff 公式和双变量 Hermite 多项式的生成函数(8)，我们对式(15)左边部分求和

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{t^m s^n}{m!n!}\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}\tau^{m-l}q^l\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sigma^{n-k}p^k\vdots H_{m-l,n-k}(a^\dagger,a)\vdots=\vdots e^{s(p+\sigma a)}e^{t(q+\tau a^\dagger)-t\tau s\sigma}\vdots$$
$$=\vdots e^{s\sigma(\frac{p}{\sigma}+a)}e^{t\tau(\frac{q}{\tau}+a^\dagger)-(t\tau)(s\sigma)}\vdots=\sum_{m,n}\frac{(t\tau)^m(s\sigma)^n}{m!n!}\vdots H_{m,n}\left(\frac{q}{\tau}+a^\dagger,\frac{p}{\sigma}+a\right)\vdots. \tag{17}$$

进一步,比较式(17)两边的相同项 $t^m s^n$,可得到

$$\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}\tau^{m-l}q^l\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sigma^{n-k}p^k\vdots H_{m-l,n-k}(a^\dagger,a)\vdots=\tau^m\sigma^n\vdots H_{m,n}(\frac{q}{\tau}+a^\dagger,\frac{p}{\sigma}+a)\vdots. \tag{18}$$

由于等式(18)左右两边算符都是正规乘积表示,并作如下代换 $g/\tau\to f,p/\sigma\to g,a^\dagger\to x$ 和 $a\to y$,我们得到新的推广二项式定理

$$\sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\binom{m}{l}\binom{n}{k}f^l g^k H_{m-l,n-k}(x,y)=H_{m,n}(f+x,g+y). \tag{19}$$

推论

$$\sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\binom{m}{l}\binom{n}{k}H_{m-l,n-k}(x,y)=H_{m,n}(1+x,1+y). \tag{20}$$

3 涉及 $H_{l,k}(\mu,v)H_{m-l,n-k}(x,y)$ 的推广二项式定理

现在我们去推导式(12)中涉及 $H_{l,k}(\mu,v)H_{m-l,n-k}(x,y)$ 的推广二项式定理.为此,首先将式(12)中 $H_{l,k}(\mu,v)$ 用反正规乘积算符 $\vdots H_{l,k}(a^+,a)\vdots$ 来代替,并利用式(13)中的引理和式(19)中的新二项式定理进行求和

$$\begin{aligned}&\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\vdots H_{l,k}(a^\dagger,a)\vdots f^l g^k H_{m-l,n-k}(x,y)\\&=\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}:a^{\dagger l}a^k:f^l g^k H_{m-l,n-k}(x,y)\\&=:H_{m,n}(fa^\dagger+x,ga+y):.\end{aligned} \tag{21}$$

进一步,利用式(8),我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{t^m t'^n}{m!n!}:H_{m,n}(fa^\dagger+x,ga+y):=:e^{-tt'+t(fa^\dagger+x)+t'(ga+y)}:\\&=e^{-tt'}e^{tfa^\dagger}e^{t'ga}e^{tx+t'y}=\vdots e^{-tt'(1+fg)+t(fa^\dagger+x)+t'(ga+y)}\vdots.\end{aligned} \tag{22}$$

令 $t\sqrt{1+fg}=s,t'\sqrt{1+fg}=s'$,那么可把式(22)改写为

$$\begin{aligned}&\sum_{m,n}^{\infty}\frac{t^m t'^n}{m!n!}:H_{m,n}(fa^\dagger+x,ga+y):\\&=\vdots e^{ss'+s\frac{fa^\dagger+x}{\sqrt{1+fg}}+s'\frac{ga+y}{\sqrt{1+fg}}}\vdots\\&=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{s^m s'^n}{m!n!}\vdots H_{m,n}(\frac{fa^\dagger+x}{\sqrt{1+fg}},\frac{ga+y}{\sqrt{1+fg}})\vdots\\&=\sum_{m,n}^{\infty}\frac{t^m t'^n}{m!n!}(\sqrt{1+fg})^{m+n}\vdots H_{m,n}(\frac{fa^\dagger+x}{\sqrt{1+fg}},\frac{ga+y}{\sqrt{1+fg}})\vdots.\end{aligned} \tag{23}$$

通过对式(23)的左右两边进行比较,我们得到算符恒等式

$$:H_{m,n}(fa^\dagger+x,ga+y):=(\sqrt{1+fg})^{m+n}\vdots H_{m,n}\left(\frac{fa^\dagger+x}{\sqrt{1+fg}},\frac{ga+y}{\sqrt{1+fg}}\right)\vdots. \tag{24}$$

结合等式(21)和(24),我们得到

$$\begin{aligned}&\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\vdots H_{l,k}(a^\dagger,a)\vdots f^l g^k H_{m-l,n-k}(x,y)\\&=(\sqrt{1+fg})^{m+n}\vdots H_{m,n}\left(\frac{fa^\dagger+x}{\sqrt{1+fg}},\frac{ga+y}{\sqrt{1+fg}}\right)\vdots.\end{aligned} \tag{25}$$

考虑到式(25)两边算符都是反正规排序,作如下代换 $a^\dagger \to \mu$ 和 $a \to \nu$,我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\binom{m}{l}\binom{n}{k}f^l g^k H_{l,k}(\mu,v)H_{m-l,n-k}(x,y)\\&=(\sqrt{1+fg})^{m+n}H_{m,n}\left(\frac{f\mu+x}{\sqrt{1+fg}},\frac{gv+y}{\sqrt{1+fg}}\right),\end{aligned}\tag{26}$$

这是涉及双变量 Hermite 多项式的另一个广义二项式定理.

推论

$$\sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\binom{m}{l}\binom{n}{k}H_{l,k}(\mu,v)H_{m-l,n-k}(x,y)=\sqrt{2^{m+n}}H_{m,n}\left(\frac{\mu+x}{\sqrt{2}},\frac{v+y}{\sqrt{2}}\right).\tag{27}$$

4　推广二项式定理(19)和(26)的具体应用

在本节中,我们将讨论推广二项式定理在处理一些量子光学理论问题中的应用. 如,利用式(19),可以把多光子扣除平移压缩态 $a^m b^n e^{sa^\dagger b^\dagger+ra^\dagger+tb^\dagger}|00\rangle=|sub\rangle$(一种典型的连续变量非高斯纠缠态,理论上可通过多光子扣除操作作用到压缩态来实现)转换为双变量 Hermite 多项式激发压缩态. 根据已有的研究结果表明,这类以双变量 Hermite 多项式为权重的量子态被证明是理论上最易实现和调控的非高斯纠缠源[12-14]. 为此,首先利用 Baker-Hausdorff 公式把算符 $a^m b^n e^{sa^\dagger b^\dagger+ra^\dagger+tb^\dagger}$ 改写为如下形式

$$a^m b^n e^{sa^\dagger b^\dagger+ra^\dagger+tb^\dagger}=e^{sa^\dagger b^\dagger+ra^\dagger+tb^\dagger}(a+sb^\dagger+r)^m(b+sa^\dagger+t)^n.\tag{28}$$

注意到算符 $a+sb^+$ 和 $b+sa^+$ 相互对易,这样指数算符 $e^{\tau(a+sb^\dagger)+v(b+sa^\dagger)}$ 可展开为

$$e^{\tau(a+sb^\dagger)+v(b+sa^\dagger)}=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\tau^m v^n}{m!n!}(a+sb^\dagger)^m(b+sa^\dagger)^n.\tag{29}$$

进一步,再利用 Baker-Hausdorff 公式和式(8)中双变量 Hermite 多项式的生成函数,可把指数算符 $e^{\tau(a+sb^\dagger)+v(b+sa^\dagger)}$ 展开为

$$\begin{aligned}&e^{\tau(a+sb^\dagger)+v(b+sa^\dagger)}\\&=:e^{s\tau v+\tau(a+sb^\dagger)+v(b+sa^\dagger)}:\\&=\sum_{m,n}^{\infty}\frac{\tau^m v^n}{m!n!}\sqrt{(\mathrm{i}s)^{m+n}}:H_{m,n}\left(\frac{a+sb^\dagger}{\sqrt{\mathrm{i}s}},\frac{b+sa^\dagger}{\sqrt{\mathrm{i}s}}\right):.\end{aligned}\tag{30}$$

比较式(29)和式(30)可见,算符 $(a+sb^\dagger)^m(b+sa^\dagger)^n$ 的正规乘积表示为

$$(a+sb^\dagger)^m(b+sa^\dagger)^n=\sqrt{(\mathrm{i}s)^{m+n}}:H_{m,n}\left(\frac{a+sb^\dagger}{\sqrt{\mathrm{i}s}},\frac{b+sa^\dagger}{\sqrt{\mathrm{i}s}}\right):.\tag{31}$$

这样,利用式(19)中的新二项式定理,我们有

$$\begin{aligned}&(a+sb^\dagger+r)^m(b+sa^\dagger+t)^n\\&=\sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\binom{m}{l}\binom{n}{k}r^{m-l}t^{n-k}(a+sb^\dagger)(b+sa^\dagger)^k\\&=\sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\binom{m}{l}\binom{n}{k}\sqrt{(\mathrm{i}s)^{l+k}}r^{m-l}t^{n-k}:H_{l,k}\left(\frac{a+sb^\dagger}{\sqrt{\mathrm{i}s}},\frac{b+sa^\dagger}{\sqrt{\mathrm{i}s}}\right):\\&=\sqrt{(\mathrm{i}s)^{m+n}}:H_{m,n}\left(\frac{r+a+sb^\dagger}{\sqrt{\mathrm{i}s}},\frac{t+b+sa^\dagger}{\sqrt{\mathrm{i}s}}\right):.\end{aligned}\tag{32}$$

再把式(32)代入式(28)可导出

$$\begin{aligned}|sub\rangle&=e^{sa^\dagger b^\dagger+ra^\dagger+tb^\dagger}\sqrt{(\mathrm{i}s)^{m+n}}:H_{m,n}\left(\frac{r+a+sb^\dagger}{\sqrt{\mathrm{i}s}},\frac{t+b+sa^\dagger}{\sqrt{\mathrm{i}s}}\right):|00\rangle\\&=\sqrt{(\mathrm{i}s)^{m+n}}H_{m,n}\left(\frac{r+sb^\dagger}{\sqrt{\mathrm{i}s}},\frac{t+sa^\dagger}{\sqrt{\mathrm{i}s}}\right)e^{sa^\dagger b^\dagger+ra^\dagger+tb^\dagger}|00\rangle.\end{aligned}\tag{33}$$

由上式清晰可见,多光子扣除压缩态 $|sub\rangle$ 可被看做双变量 Hermite 多项式激发压缩态. 实际上,它也是一个非高斯纠缠态,可以通过 Hermite 多项式算符 $H_{m,n}\left(\frac{r+sb^\dagger}{\sqrt{\mathrm{i}s}},\frac{t+sa^\dagger}{\sqrt{\mathrm{i}s}}\right)$ 作用到压缩态 $e^{sa^\dagger b^\dagger+ra^\dagger+tb^\dagger}|00\rangle$

上来实现. 由此可断定,算符 $H_{m,n}\left(\frac{r+sb^\dagger}{\sqrt{\mathrm{i}s}},\frac{t+sa^\dagger}{\sqrt{\mathrm{i}s}}\right)$ 具有产生非高斯特征的作用. 此外,由式(33)能直接导出密度算符 $|sub\rangle\langle sub|$ 的正规乘积表示,即

$$|sub\rangle\langle sub| = s^{m+n}:H_{m,n}\left(\frac{r+sb^\dagger}{\sqrt{\mathrm{i}s}},\frac{t+sa^\dagger}{\sqrt{\mathrm{i}s}}\right)\mathrm{e}^{sa^\dagger b^\dagger+ra^\dagger+tb^\dagger}H_{m,n}\left(\frac{r+sb}{\sqrt{-\mathrm{i}s}},\frac{t+sa}{\sqrt{-\mathrm{i}s}}\right)\mathrm{e}^{-a^\dagger a-b^\dagger b}\mathrm{e}^{sab+ra+tb}:, \tag{34}$$

此式能为计算态 $|sub\rangle$ 的归一化因子、Einstein-Podolsky-Rosen 关联和量子隐形传态的保真度等提供便利.

另一方面,利用新的二项式定理(26)可以简化计算自旋相干态 $|\tau\rangle$ 的 Wigner 函数. 在角动量的 Schwinger 玻色算符实现下,自旋相干态 $|\tau\rangle$ 表示为[15]

$$|\tau\rangle = C\sum_{n=0}^{2j}\binom{2j}{n}^{1/2}\zeta^n|2j-n,n\rangle, \tag{35}$$

式中 $C=(1+|\zeta|^2)^{-j}$ 为态 $|\tau\rangle$ 的归一化因子. 为了获得态 $|\tau\rangle$ 的 Wigner 函数,首先引入双模 Wigner 算符的纠缠态 $|\eta\rangle$ 表示,即

$$\Delta(\sigma,\gamma) = \int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi^3}|\sigma-\eta\rangle\langle\sigma+\eta|\mathrm{e}^{\eta\gamma^*-\eta^*\gamma}, \tag{36}$$

式中 σ,γ 均为复参数. 假设 $\alpha=(\gamma+\sigma)/2$ 和 $\beta^*=(\gamma-\sigma)/2$,并利用有序算符内积分技术,可有 $\Delta(\sigma,\gamma)=\Delta(\alpha,\alpha^*)\otimes\Delta(\beta,\beta^*)$,其中 $\Delta(i,i^*)(i=\alpha,\beta)$)为相干态表象下的单模 Wigner 算符. 进一步,利用纠缠态 $|\eta\rangle$ 在双模 Fock 空间中的展开式(11)和双变量 Hermite 多项式的复共轭关系 $H^*_{m,n}(\varepsilon,\varepsilon^*)=H_{m,n}(\varepsilon,\varepsilon^*)$,可得到内积 $\langle\eta|\tau\rangle$,即

$$\langle\eta|\tau\rangle = C\mathrm{e}^{-|\eta|^2/2}\sum_{n=0}^{2j}H_{n,2j-n}(\eta,\eta^*)\frac{(-\zeta)^n\sqrt{(2j)!}}{n!(2j-n)!}. \tag{37}$$

因此,由式(36)和(37)可把态 $|\tau\rangle$ 的 Wigner 函数表达为

$$\begin{aligned}W(\sigma,\gamma) &= \mathrm{Tr}[\Delta(\sigma,\gamma)|\tau\rangle\langle\tau|]\\ &= \frac{C^2\mathrm{e}^{-|\sigma|^2-|\eta|^2}}{(2j)!(1+|\zeta|^2)^{2j}}\sum_{m,n=0}^{2j}\binom{2j}{m}\binom{2j}{n}(-1)^{m+n}\zeta^{*m}\zeta^n\\ &\quad\times\frac{\partial^{2j}}{\partial t^{2j-m}\partial t'^m}\frac{\partial^{2j}}{\partial r^n\partial r'^{2j-n}}\int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi^3}\exp[\eta\gamma^*-\eta^*\gamma-tt'+t(\sigma-\eta)\\ &\quad+t'(\sigma^*-\eta^*)-rr'+r(\sigma+\eta)+r'(\sigma^*+\eta^*)]|_{t=t'=r=r'=0}.\end{aligned} \tag{38}$$

进一步,利用数学积分公式

$$\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}\exp(\zeta|z|^2+\xi z+\eta z^*+fz^2+gz^{*2}) = \frac{1}{\sqrt{\zeta^2-4fg}}\exp\left(\frac{-\zeta\xi\eta+\xi^2g+\eta^2f}{\zeta^2-4fg}\right), \tag{39}$$

此式仅当 $\mathrm{Re}(\zeta\pm f\pm g)<0,\mathrm{Re}(\frac{\zeta^2-4fg}{\zeta\pm f\pm g})<0$ 时成立. 这样,我们有

$$\begin{aligned}W(\sigma,\gamma) &= \frac{C^2\mathrm{e}^{-|\sigma|^2-|\eta|^2}}{\pi^2(2j)!}\sum_{m,n=0}^{2j}\binom{2j}{m}\binom{2j}{n}(-1)^{m+n}\zeta^{*m}\zeta^n\\ &\quad\times\frac{\partial^{2j}}{\partial t^{2j-m}\partial t'^m}\frac{\partial^{2j}}{\partial r^n\partial r'^{2j-n}}\exp[-tr'+(\sigma+\gamma)t-rt'\\ &\quad+(\sigma^*+\gamma^*)r'+(\sigma-\gamma)r+(\sigma^*-\gamma^*)t']|_{t=t'=r=r'=0}\\ &= \frac{C^2e^{-|\sigma|^2-|\eta|^2}}{\pi^2(2j)!}\sum_{m,n=0}^{2j}\binom{2j}{m}\binom{2j}{n}(-1)^{m+n}\zeta^{*m}\zeta^n\\ &\quad\times H_{2j-m,2j-n}(\sigma+\gamma,\sigma^*+\gamma^*)H_{m,n}(\sigma^*-\gamma^*,\sigma-\gamma).\end{aligned} \tag{40}$$

利用式(26)中的推广二项式定理,可把式(40)简化为

$$W(\sigma,\gamma) = \frac{\mathrm{e}^{-|\gamma|^2-|\sigma|^2}}{\pi^2(2j)!}H_{2j,2j}(\vartheta^*,\vartheta), \tag{41}$$

式中 $\vartheta=[-\zeta^*(\sigma^*-\gamma^*)+(\sigma+\gamma)]/\sqrt{1+|\zeta|^2}$. 若再利用双变量 Hermite 多项式和单变量 Laguerre 多项式之间满足的关系式

$$H_{m,n}(\lambda,\lambda^*) = e^{i(m-n)\theta}H_{m,n}(r,r) = e^{i(m-n)\theta}(-1)^p p! r^l L_p^l(r^2), \tag{42}$$

其中 $p = \min(m,n)$ 和 $l = |m-n|$,我们最终得到

$$W(\sigma,\gamma) = \frac{e^{-|\gamma|^2-|\sigma|^2}}{\pi^2}L_{2j}(|\vartheta|^2). \tag{43}$$

上式表明,利用最新引进的推广二项式定理(26),可见态 $|\tau\rangle$ 的 Wigner 函数可简写为一个仅与 Laguerre 多项式 $L_{2j}(\cdot)$ 有关的理想结果. 而且,由 $L_{2j}(\cdot)$ 的原始定义可知,Wigner 函数 $W(\sigma,\gamma)$ 必然表现出明显的非高斯特征. 因此,我们断定式(43)中的简洁结果便于人们去研究态 $|\tau\rangle$ 的非经典性质、纠缠和保隐形传态保真度等.

5 结论

本文充分利用纠缠态表象和有序算符内积分方法推导出了涉及双变量 Hermite 多项式的推广二项式定理,即

$$\sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\binom{m}{l}\binom{n}{k}f^l g^k H_{m-l,n-k}(x,y) = H_{m,n}(f+x,g+y)$$

和

$$\sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\binom{m}{l}\binom{n}{k}f^l g^k H_{l,k}(\mu,v)H_{m-l,n-k}(x,y) = (\sqrt{1+fg})^{m+n}H_{m,n}\left(\frac{f\mu+x}{\sqrt{1+fg}},\frac{gv+y}{\sqrt{1+fg}}\right).$$

根据新的二项式定理,我们给出了一些有价值的推论,并发现 Hermite 多项式算符 $H_{m,n}\left(\frac{r+sb^\dagger}{\sqrt{is}},\frac{t+sa^\dagger}{\sqrt{is}}\right)$ 能导致产生量子态的非高斯特征,而态 $|\tau\rangle$ 的 Wigner 函数 $W(\sigma,\gamma)$ 与 Laguerre 多项式相关,能展现一种典型的非高斯分布. 另外,也找到了双变量 Hermite 多项式算符的正规乘积和反正规乘积之间的关系式.

参 考 文 献

[1] Magnus W, Oberhettinger F, Soni R P. Formulas and Theorems for theSpecial Functions of Mathematical Physics[M]. Berlin: Springer, 1966.

[2] Francisco Neto A. Spin coherent states, binomial convolution and a generalization of the Möbius function[J]. J Phys A: Math Theor, 2012, 45(39): 395308.

[3] Fan H Y, Klauder J R. Canonical coherent-state representation of some squeeze operators[J]. J Phys A: Math Gen, 1988, 21(14): L725-L730.

[4] Fan H Y, Chen J H, Chen P F. On the entangled fractional squeezing transformation[J]. Front Phys, 2015, 10(2): 67-71.

[5] Go'mez-Ullate D, Grandati Y, Milson R. Rational extensions of the quantum harmonic oscillator and exceptional Hermite polynomials [J]. J Phys A: Math Theor, 2014, 47(1): 015203.

[6] Hoffmann S E, Hussin V, Marquette I, et al. Coherent states for ladder operators of general order related to exceptional orthogonal polynomials[J]. J Phys A: Math Theor, 2018, 51(8): 085202.

[7] Fan H Y, Klauder J R. Eigenvectors of two particles' relative position and total momentum[J]. Phys Rev A, 1994, 49 (2): 704-707.

[8] Meng X G, Wang J S, Liang B L. A new finite-dimensional pair coherent state studied by virtue of the entangled state representation and its statistical behavior[J]. Opt Commun,2010, 283(20) : 4025-4031.

[9] Lande A. Priciples of Quantum Mechanics[M]. UK: Cambridge University Press, 2013.

[10] 刘奇瑁,刘山亮.量子延迟选择实验中的因果性[J]. 聊城大学学报(自然科学版),2016,29(1):19-22.

[11] 杨芹英,梁宝龙,王继锁.基于玻色约瑟夫森结的自旋压缩的相干控制[J]. 聊城大学学报(自然科学版),2014,27(1):39-42.

[12] Li Y Z, Jia F, Zhang H L, et al. Hermite polynomial excited squeezed vacuum as quantum optical vortex states[J]. Laser Phys Lett, 2015, 12(11): 115203.

[13] Liu S Y, Li Y Z, Hu L Y, et al. Nonclassical properties of Hermite polynomial excitation on squeezed vacuum and its decoherence in phase-sensitive reservoirs[J]. Laser Phys Lett, 2015, 12(4): 045201.

[14] Zhang H L, Yuan H C, Hu L Y, et al. Synthesis of Hermite polynomial excited squeezed vacuum states from two separate single-mode squeezed vacuum states[J]. Opt Commun, 2015 , 356(12) : 223-229.

[15] Honarasa G. Quantum statistical properties of photon-added spin coherent states[J]. Chinese Phys B, 2017, 26 (11) : 206-209.

(下转第 86 页)

[91] Nunziata F, Migliaccio M, Li X. Dual-polarized COSMO-SkyMed SAR data for coastline detection[C]. // IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium, IEEE, 2012.

[92] Nunziata F, Migliaccio M, Li X, et al. Coastline extraction using dual-polarimetric COSMO-SkyMed pingpong mode SAR data[J]. IEEE Geoscience & Remote Sensing Letters, 2013, 11(1):104-108.

[93] Buono A, Nunziata F, Mascolo L, et al. A multipolarization analysis of coastline extraction using X-band COSMO-skymed SAR data [J]. IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations & Remote Sensing, 2014, 7(7):2811-2820.

[94] 刘春,殷君君,杨健. 基于混合边缘检测的极化SAR图像海岸线检测[J]. 系统工程与电子技术,2016,38(6):1262-1267.

[95] Ferrentino E, Nunziata F, Migliaccio M. Monitoring waterline variation of the monte Cotugno lake using dual-polarimetric SAR data [C]. // IEEE, International Forum on Research and Technologies for Society and Industry, IEEE, 2017.

[96] Horritt M S, Mason D C, Cobby D M, et al. Waterline mapping in flooded vegetation from airborne SAR imagery[J]. Remote Sensing of Environment, 2003, 85(3):271-281.

[97] Manaf S A, Mustapha N, Nasir M, et al. Fusion of optical and sar in extracting shoreline at northeast coast of peninsular mal aysla [C]. // The Asian Conference on Remote Sensing, 2015.

[98] Hanssen R F. Radar interferometry data interpretation and error analysis[J]. Journal of the Graduate School of the Chinese Academy of Sciences, 2001, 2(1):5577-5580.

[99] 王华,罗丽芳. 利用InSAR相干性提取青藏高原湖泊边界[J]. 广东工业大学学报,2014(1):118-120.

[100] Cloude S R, Pottier E. A review of target decomposition theorems in radar polarimetry[J]. IEEE Transactions on Geoscience & Remote Sensing, 1996, 34(2):498-518.

[101] 王庆,曾琪明,廖静娟. 基于特征向量分解与散射机制判别指数的全极化SAR图像地物提取与分类[J]. 遥感信息,2012(2):9-14.

[102] Mitchell T, Buchanan B, Dejong G, et al. Machine Learning[M]. McGraw-Hill Education (Asia):China Machine Press:2003.

Research Progress and Trend Analysis of Water Extraction by Spaceborne SAR

NIU Shi-lin GUO Zheng-wei LI Ning WU Lin ZHAO Jian-hui

(School of Computer and Information Engineering, Henan University, Kaifeng 475004,China)

Abstract Synthetic Aperture Radar (SAR) is an active microwave imaging sensor that can image earth all-time and all-weather without being affected by weather, light and clouds. Therefore, SAR images have become one of the main data sources for water monitoring based on remote sensing. From the perspective of technical methods, several typical methods and applications for water extraction based on SAR images at home and abroad in recent years were discussed; The various methods were introduced from the aspect of technical principles and experimental results. Finally, the development trend of water extraction technology based on Spaceborne SAR is prospected.

Key words synthetic aperture radar (SAR);remote sensing;water extraction

(上接第71页)

New Generalized Binomial Theorems Involving Two-variable Hermite Polynomials Via Quantum Optics Approach and Their Applications

MENG Xiang-guo

(School of Physical Science and Information Engineerig, Shandong Provincial Key Laboratory of Optical Communication Science and Technology, Liaocheng University, Liaocheng 252059, China)

Abstract We extend the ordinary binomial theorem to the case which involves two-variable Hermite polynomials $H_{l,k}(x,y)$ in the context of quantum optics, and analytically obtain several new generalized binomial theorems and their corollaries. As their applications, we analytically prove that the multiple-photon-subtracted squeezed state $a^m b^n e^{\lambda a^\dagger b^\dagger + ra^\dagger + tb^\dagger} |00\rangle$ is equivalent to the Hermite-polynomial-weighted quantum state serving as an easily controlled non-Gaussian entangled information resource, and the Wigner functions of the spin coherent states are respectively the Laguerre polynomials.

Key words new binomial theorem;entangled state representation;the method of integration within ordered product of operators;Wigner function