

基于宇称测量的热态和 Fock 态的相位估计方案^①

王 帅 吴世臣 睦永兴

(江苏理工学院 数理学院,江苏 常州 213001)

摘 要 在基于干涉仪的量子精密测量中,输入量子态的选择直接决定了待测相位的测量精度. 本文考虑了基于压缩热态(特别是自由热态的情况)和 Fock 态的直积态作为马赫-曾德尔干涉仪的输入态,计算得到了宇称测量信号的解析解,进而得到了相位测量精度. 研究表明:在待测相位很小时,压缩热态、压缩真空态以及自由热态与 Fock 态的直积态做为干涉仪的输入态时,均可得到相同的相位测量精度极限,且该测量极限达到了基于量子 Fisher 信息量子 Crámer-Rao 界限,所以宇称测量是相应的最优测量. 同时,研究结果也表明,除了相干态,高强度的自由热态在量子精密测量中也有着一定的应用价值.

关键词 量子精密测量;马赫-曾德尔干涉仪;宇称测量;自由热态;Fock 态

中图分类号 O413.1

文献标识码 A

在量子精密测量中,基于光子或原子的干涉仪是测量微小相位的重要工具^[1,2]. 一般情况下,干涉仪的相位测量精度主要依赖于采用何种输入量子态,输入态的选择直接决定了待测相位所能达到的精度极限. 在光学测量中,马赫-曾德尔干涉仪(Mach-Zehnder interferometer)是目前广泛被用来作为相位测量的线性干涉仪. 如果采用经典光束,比如处于相干态的激光束,相位测量精度最终受限于标准量子极限^[3],即 $1/\sqrt{n}$ (n 输入到干涉仪的平均光子数). 若采用非经典光束,相位测量精度不但能超越标准量子极限,甚至可接近海森堡极限^[4,5],即 $1/n$. 1981 年,Caves 首次提出将高强度的相干态和低强度的单模压缩真空态(非经典量子态)作为马赫-曾德尔干涉仪的输入态^[6],发现对相位测量精度将会大大超越标准量子极限,甚至达到海森堡极限. 随后,许多作者研究了各种量子态在干涉仪相位测量精度上的性能表现^[7-16].

激光技术中高强度的相干态是容易制备的,它已成为量子精密测量中的一种重要资源,得到了广泛应用. 另外,光的自由热态也是以一种经典态,它是一个混合态,同时也是热力学与统计物理中一个重要的概念. 到目前为止,自由热态已经在鬼成像^[17,18]、量子照明^[19]和热激光^[20]等领域得到了广泛应用. 最近,自由热态与压缩真空态作为 SU(1,1)非线性型干涉仪的输入态时,相应的相位测量精度可以超越标准量子极限^[21],这为热光在光学干涉仪中相位测量的应用提供了一个范例. 在线性干涉仪中,2013 年 Pezzé 和 Smerzi^[22]考虑了马赫-曾德尔干涉仪中的一端输入 Fock 态,而另一端输入任意量子态(譬如,相干态或自由热态),基于量子 Fisher 信息发现在输入光子数一定情况下,可得到相同的相位测量精度极限. 从相位测量方案上,人们还进一步解析地证明了 Pezzé 和 Smerzi 所给出的量子 Crámer-Rao 界限完全可以由宇称测量方案和误差传递公式来获得^[23]. 因此,在此种情况下,宇称测量方法是最优测量方案. 但以上两个工作,并没有具体计算自由热态的情况. 尽管王晓光等人基于压缩热态和 Fock 态作为马赫-曾德尔干涉仪的输入态,利用宇称测量方法,他们在相位测量精度研究方面也做了一定的研究^[24],但宇称测量信号和相位测量精度极限的解析结果也没有给出. 因此,在本文中,将在文献^[24]的基础上,首先给出压缩热态和 Fock 态作为马赫-曾德尔干涉仪的输入态时,给出宇称测量信号的解析解,进而解析地给出相应的相

① 收稿日期:2018-9-20

基金项目:国家自然科学基金项目(11404040);江苏省自然科学基金项目(BK20140253)资助

通讯作者:王帅,男,汉族,博士,副教授,研究方向:量子光学,E-mail:wshslxy@jsut.edu.cn.

位测量精度极限. 特别地, 本文将着重分析自由热态和 Fock 态作为输入态时, 它们在相位测量精度的性能表现.

1 马赫-曾德尔干涉仪的输入输出量子态的变换理论

借助量子态的 Wigner 相空间分布函数表示^[25], 首先回顾一下关于马赫-曾德尔干涉仪光场的输入-输出量子态的变换理论. 马赫-曾德尔干涉仪的结构示意图如图 1 所示, 主要由两块分束器、两个全反射镜和一个相位产生器等光学器件构成, 通常分束器取为 50 : 50 的对称形式. Yurke 等人^[26]指出分束器的作用可以用表示空间转动的 SU(2) 群来表示. 在基于 Schwinger 表象的 SU(2) 群中, 存在对易关系式 $[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$, 这里 $J_i (i = x, y, z)$ 是角动量算符, 根据玻色算符可以写成

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{1}{2}(a^\dagger b + ab^\dagger), J_y = \frac{1}{2i}(a^\dagger b - ab^\dagger), \\ J_z &= \frac{1}{2}(a^\dagger a - b^\dagger b), J_0 = \frac{1}{2}(a^\dagger a + b^\dagger b), \end{aligned} \quad (1)$$

式中 J_0 称为 Casimir 算符, 它与其它三个角动量算符都对易, 即 $[J_0, J_i] = 0$. 在基于 Schwinger 表象的 SU(2) 群中, 一个 50 : 50 的分束器可用如下么正算符描述^[26]

$$U_x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \exp\left[i\frac{\pi}{2}J_x\right]. \quad (2)$$

对于一个马赫-曾德尔干涉仪而言, 通常选取第一个分束器为 $U_x\left(\frac{\pi}{2}\right)$, 第二个分束器 $U_x\left(-\frac{\pi}{2}\right)$. 与分束器类似, 相位产生器也可用一个么正算符来描述, 即

$$U_{ps}(\varphi) = \exp[-i\varphi J_z]. \quad (3)$$

相位产生器是描述光经过干涉仪的两条光路所产生的相位差 φ . 在真实的实验中, 它可以用于模拟某些原因(如引力波或者存在某种介质)造成的光程改变所引起的相位差, 这正是需要测量的相位. 那么整个干涉仪对输入态的作用可表示为

$$U_{MZI}(\varphi) = \exp\left[i\frac{\pi}{2}J_x\right]\exp[-i\varphi J_z]\exp\left[-i\frac{\pi}{2}J_x\right] = \exp[-i\varphi J_y]. \quad (4)$$

在式(4)的最后一步中, 利用了 Baker-Hausdorf 算符恒等式和对易关系式 $[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$. 当某一个量子态 $\rho_{in} = \rho_a \otimes \rho_b$ 作为输入态时, 马赫-曾德尔干涉仪输出量子态的密度算符 ρ_{out} 为

$$\rho_{out} = \exp[-i\varphi J_y]\rho_{in}\exp[i\varphi J_y]. \quad (5)$$

量子干涉是一个输入输出的过程^[26], 原则上基于输入量子态和输出量子态的变换关系式(5), 可以得到输出量子态的所有统计属性^[27].

由于算符之间存在非对易的关系, 在有些问题中直接用算符及其变换关系来计算输出量子态的密度算符是很复杂的, 而利用量子态的 Wigner 分布函数表示却可以比较方便地解决问题^[28]. 与式(5)相对应, 人们已经得到了

马赫-曾德尔干涉仪的输入量子态和输出量子态的 Wigner 函数变换关系^[24, 28, 29]. 若输入态的 Wigner 函数为

$$W_{in}(\alpha_i, \beta_i) = W_{\rho_a}(\alpha_i)W_{\rho_b}(\beta_i), \quad (6)$$

式中 $W_{\rho_a}(\alpha_i)$ 和 $W_{\rho_b}(\beta_i)$ 分别是输入量子态 ρ_a 和 ρ_b 的 Wigner 函数. 经过干涉仪后, 输出量子态的 Wigner 函数可以表示为^[24, 28]

$$W_{out}(\alpha_f, \beta_f) = W_{in}(\alpha_i(\alpha_f; \beta_f), \beta_i(\alpha_f; \beta_f)) \quad (7)$$

式中

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \alpha_f \cos(\varphi/2) + \beta_f \sin(\varphi/2), \\ \beta_i &= -\alpha_f \sin(\varphi/2) + \beta_f \cos(\varphi/2). \end{aligned} \quad (8)$$

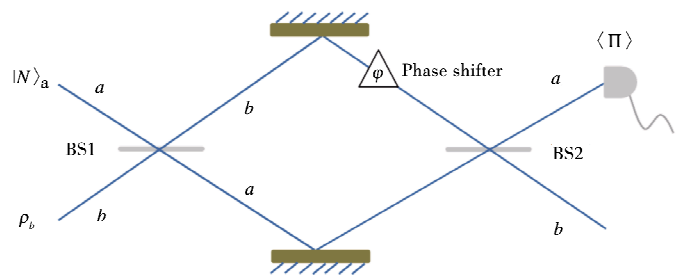


图1 马赫-曾德尔干涉仪结构示意图

特别地,若 $\varphi=0$ 时,对于对称的马赫-曾德尔干涉仪,输出量子态就是输入时的量子态. 由式(7)得到了干涉仪输出量子态的 Wigner 函数后,就可以研究分析输出量子态的统计性质. 借助 Wigner 函数与宇称算符的关系,就能得到对于干涉仪进行宇称测量的信号值,进而由误差传递公式得到待测相位的测量精度^[30].

2 相位的测量精度与宇称测量方案

当压缩热态和 Fock 态作为马赫-曾德尔干涉仪的输入态时,文献[24]并没有给出宇称测量结果的解析解. 在这里将在文献[24]的基础上,首先导出该解析表达式,并解析地验证待测相位的最优测量精度与量子 Crámer-Rao 界限相一致,即解析地证明宇称测量此时是最优测量. 特别地,本文着重研究在自由热态和 Fock 态作为干涉仪的输入态时,这一测量方案在相位测量精度的性能表现.

2.1 压缩热态与 Fock 态作为干涉仪的输入态

在 Fock 态表象中,压缩热态的密度算符 ρ_{STS} 为

$$\rho_{\text{STS}} = S_b(r)\rho_{\text{th}}S_b^\dagger(r) = \sum_l \frac{\bar{n}_{\text{th}}^l}{(\bar{n}_{\text{th}}^l + 1)^{l+1}} S_b(r) |l\rangle\langle l| S_b^\dagger(r), \quad (9)$$

式中 $|l\rangle$ 是光子数为 l 的 Fock 态, $\rho_{\text{th}} = \sum_l \frac{\bar{n}_{\text{th}}^l}{(\bar{n}_{\text{th}}^l + 1)^{l+1}} |l\rangle\langle l|$ 是自由热态的密度算符, \bar{n}_{th} 是自由热态所含有的平均光子数, $S_b(r) = \exp[-(b^{\dagger 2} - b^2)/2]$ 是单模压缩算符. 根据式(9),人们已经求出了该单模压缩热态所含有的平均光子数为^[25]

$$\bar{n}_{\text{STS}} = \bar{n}_{\text{th}} \cosh 2r + \sinh^2 r. \quad (10)$$

对于输入态 $|N\rangle_a \langle N| \otimes \rho_{\text{STS}}$, 相应的 Wigner 函数为

$$W_{\text{in}}(\alpha_i, \beta_i) = W_{|N\rangle}(\alpha_i) W_{\rho_{\text{STS}}}(\beta_i), \quad (11)$$

式中 $W_{|N\rangle}(\alpha_i)$ 和 $W_{\rho_{\text{STS}}}(\beta_i)$ 分别是 Fock 态和压缩热态的 Wigner 函数^[31], 即

$$W_{|N\rangle}(\alpha_i) = \frac{2}{\pi} (-1)^N \exp[-2|\alpha_i|^2] L_N(4|\alpha_i|^2), \quad (12)$$

和

$$W_{\rho_{\text{STS}}}(\beta_i) = \frac{2}{\pi(1+2\bar{n}_{\text{th}})} \exp\left[\frac{\sinh 2r}{1+2\bar{n}_{\text{th}}}(\beta_i^2 + \beta_i^{*2}) - \frac{2\cosh 2r}{1+2\bar{n}_{\text{th}}}|\beta_i|^2\right], \quad (13)$$

式中 $L_n(|\alpha_i|^2)$ 是 n 阶拉盖尔多项式, 即

$$L_n(|\alpha_i|^2) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^{2n}}{\partial t^n \partial t'^n} \exp[-t t' + t \alpha_i + t' \alpha_i^*] \Big|_{t=t'=0}. \quad (14)$$

当压缩热态和 Fock 态作为马赫-曾德尔干涉仪的输入态时,由式(7-8)和式(11-13)容易得到相应输出态的 Wigner 函数为

$$W_{\text{out}}(\alpha_i, \beta_i) = W_{|N\rangle}(\alpha_i(\alpha_f; \beta_f)) W_{\rho_{\text{STS}}}(\beta_i(\alpha_f; \beta_f)). \quad (15)$$

求解宇称算符在干涉仪输出量子态中的期望值,称为宇称测量^[30],通过宇称测量信号的反演,就可给出马赫-曾德尔干涉仪中待测相位的数值. 根据 Wigner 函数与宇称算符之间的关系^[32]

$$W(\alpha) = 2\langle D^\dagger(\alpha) \Pi D(\alpha) \rangle / \pi. \quad (16)$$

宇称算符的期望值就是量子态的 Wigner 函数在相空间中心($\alpha=0$)的值. 所以若在马赫-曾德尔干涉仪的 α 输出端进行宇称测量时,宇称算符的期望值可表示为^[28,30]

$$\langle \Pi_\alpha \rangle = \frac{\pi}{2} \int W_{\text{out}}(0, \beta) d^2\beta. \quad (17)$$

由式(15)可知,式(17)中的 $W_{\text{out}}(0, \beta)$ 可表示为

$$W_{\text{out}}(0, \beta_f) = \frac{4}{\pi^2 N! (1+2\bar{n}_{\text{th}})} \frac{\partial^{2N}}{\partial t^N \partial t'^N} \exp[-t t'] \times \exp\left[-\left[2\sin^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{2\cosh 2r \cos^2 \frac{\varphi}{2}}{1+2\bar{n}_{\text{th}}}\right] |\beta|^2 + 2t \sin \frac{\varphi}{2} \beta + 2t' \sin \frac{\varphi}{2} \beta^* + \frac{\sinh 2r \cos^2 \frac{\varphi}{2}}{1+2\bar{n}_{\text{th}}} (\beta_f^2 + \beta_f^{*2})\right]. \quad (18)$$

注意到以下积分公式^[31]

$$\int \frac{d^2\beta}{\pi} \exp[\zeta|\beta|^2 + \xi\beta + \eta\beta^* + f\beta^2 + g\beta^{*2}] = \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 - 4fg}} \exp\left[\frac{-\xi\eta + \xi^2g + \eta^2f}{\zeta^2 - 4fg}\right], \quad (19)$$

该积分公式的收敛条件为 $\text{Re}(\zeta \pm f \pm g) < 0$ 和 $\text{Re}\left(\frac{\xi^2 - 4fg}{\xi \pm f \pm g}\right) < 0$, 对式(17)进行积分后, 最终可以得到宇称算符期望值的解析解, 即

$$\begin{aligned} \langle \Pi_\alpha \rangle_{|N\rangle, \rho_{\text{STS}}} &= \frac{\partial^{2N}}{N! \sqrt{A} \partial t^N \partial t'^N} \exp\left[\frac{B}{A} tt' + \frac{C}{4A} (t^2 + t'^2)\right]_{t, t'=0} \\ &= \frac{N!}{\sqrt{A}} \left(\frac{B}{A}\right)^N \sum_{l=0}^{N/2} \frac{C^{2l} B^{2l}}{4^{2l} (l!)^2 (N-2l)!}, \end{aligned} \quad (20)$$

式中

$$\begin{aligned} A &= (2\bar{n}_{\text{th}} \sin^2 \varphi/2 + 1)^2 + (2\bar{n}_{\text{th}} + 1) \sinh^2 r \sin^2 \varphi, \\ B &= (2\bar{n}_{\text{th}} \sin^2 \varphi/2 + 1)(2\bar{n}_{\text{th}} \sin^2 \varphi/2 - \cos \varphi), \\ C &= (2\bar{n}_{\text{th}} + 1) \sinh 2r \sin^2 \varphi. \end{aligned} \quad (21)$$

相对于文献[24], 本文给出了宇称测量信号的积分结果, 为解析地分析该相位测量方案的性能表现提供了方便. 譬如, 积分结果式(20)虽然有些复杂, 但在待测相位趋于零时, 即 $\varphi \rightarrow 0$, 把 $\langle \Pi_\alpha \rangle_{|N\rangle, \rho_{\text{STS}}}$ 在 $\varphi=0$ 处进行泰勒展开, 就可以得到简洁的结果

$$\langle \Pi_\alpha(\varphi \rightarrow 0) \rangle_{|N\rangle, \rho_{\text{STS}}} = (-1)^N \left[1 - \frac{2\bar{n}_{\text{STS}}N + \bar{n}_{\text{STS}} + N}{2} \varphi^2 + O(\varphi^4) \right], \quad (22)$$

式中 \bar{n}_{STS} 和 N 分别是输入量子态压缩热态和 Fock 态的平均光子数. 式(20)和(23)就是本文的主要结果之一. 基于式(20)和(22)可以洞悉更多的物理内容. 譬如, 式(22)明显地表明, 如果 Fock 态进入马赫-曾德尔干涉仪的一个输入端口, 另一端输入压缩热态、压缩真空态或热态, 在待测相位趋于零时可以得到完全相同的宇称测量信号. 特别地, 若 $\varphi=0$, 由式(22)立即可得 $\langle \Pi_\alpha(\varphi=0) \rangle_{|N\rangle, \rho_{\text{STS}}} = (-1)^N$, 这正是干涉仪端口进行宇称测量所期待的结果.

利用误差传播理论, 干涉仪的相位测量精度为^[30]

$$\Delta\varphi = \frac{\sqrt{1 - \langle \Pi(\varphi) \rangle^2}}{|\partial \langle \Pi(\varphi) \rangle / \partial \varphi|}, \quad (23)$$

式中已经利用了 $\langle \Pi^2(\varphi) \rangle = 1$ 这一事实. 把式(22)直接代入式(23), 就可以立即给出在 $\varphi \rightarrow 0$ 时, 压缩热态和 Fock 态作为干涉仪的输入态, 相位的测量精度

$$\Delta\varphi|_{\varphi \rightarrow 0} = \frac{1}{\sqrt{2\bar{n}_{\text{STS}}N + \bar{n}_{\text{STS}} + N}}. \quad (24)$$

实际上, 对于马赫-曾德尔干涉仪的一端输入 Fock 态, 另一端输入任意具有相同光子数的量子态, 不管是基于量子 Fisher 信息所给出的量子 Crámer-Rao 界限 $\Delta\varphi_{\text{min}} = 1/\sqrt{F_Q}$ ^[22], 还是从宇称测量的角度^[23], 都会得到相同的最优测量精度. 本文所考虑的问题是一个特例, 即干涉仪的另一端输入压缩热态的情况, 所得结果是对文献[22-24]的有益补充.

2.2 自由热态与 Fock 态作为干涉仪的输入态

相对于压缩光束, 甚至相干态光束, 处于自由热态的热光束更容易制备. 接下来主要分析自由热态和 Fock 态作为干涉仪的输入态时的干涉问题. 在此种情况下, 基于式(20)所导出的宇称测量信号是很简洁紧凑的, 即

$$\langle \Pi_\alpha \rangle_{|N\rangle, \rho_{\text{th}}} = \frac{[2\bar{n}_{\text{th}} \sin^2(\varphi/2) - \cos(\varphi)]^N}{[1 + 2\bar{n}_{\text{th}} \sin^2(\varphi/2)]^{N+1}}, \quad (25)$$

这是一个新的结果, 是自由热态和 Fock 态作为干涉仪的输入态时的宇称测量信号的解析式. 类似地, 在 $\varphi \rightarrow 0$ 的情况下, $\langle \Pi_\alpha \rangle_{|N\rangle, \rho_{\text{th}}}$ 的泰勒展开式为

$$\langle \Pi_\alpha(\varphi \rightarrow 0) \rangle_{|N\rangle, \rho_{\text{th}}} = (-1)^N \left[1 - \frac{2\bar{n}_{\text{th}}N + \bar{n}_{\text{th}} + N}{2} \varphi^2 + O(\varphi^4) \right], \quad (26)$$

这是式(22)的特殊情况. 相应地, 在 $\varphi \rightarrow 0$ 时, 自由热态和 Fock 态作为干涉仪的输入态, 由式(25)得相位

的测量精度为

$$\Delta\varphi|_{\varphi=0} = \frac{1}{\sqrt{2\bar{n}_{th}N + \bar{n}_{th} + N}}, \quad (27)$$

式(27)表明,当热态光场的平均光子数和 Fock 态的光子数相等时($\bar{n}_{th} = N$),可得到最优的相位测量精度. 并且在总光子数 $\bar{n} \gg 1$ 的情况下,最优相位测量精度为 $\Delta\varphi|_{\text{optimal}} = \sqrt{2}/\bar{n}$,不但高于标准测量精度,且接近海森堡极限. 当然只把自由热态或 Fock 态输入到马赫-曾德尔干涉仪,那么相位测量精度极限为 $\Delta\varphi|_{\varphi=0} = 1/\sqrt{\bar{n}_{th}}$ 或 $\Delta\varphi|_{\varphi=0} = 1/\sqrt{N}$,即标准量子极限. 与文献[22]和[23]相比较,如果把自由热态替换成相干态,虽然宇称测量信号式(25)不同,但在待测相位很微小时,都有与式(26)和(27)一样的结果. 所以,正如文献[21]所说,在量子精密测量中,除了相干态,自由热态也是一个可供选择的量子态.

结合文献[23]关于相干态与 Fock 态作为干涉仪输入态的研究结果,在图 2 中画出了具有相同光子数的自由热态或相干态与 Fock 态作为马赫-曾德尔干涉仪的输入态时,宇称测量信号随待测相位的变化曲线. 由图 2 中可以看出:在给定相同光子数(譬如, $\bar{n}_{th} = |z|^2 = 4$)的自由热态或相干态,它们分别与具有不同光子数的 Fock 态(譬如, $N=0, 1, 2, 5$)作为干涉仪的输入态时,宇称测量信号在待测相位很小时几乎是一样的. 因此,具有相同光子数的自由热态或相干态与 Fock 态作为马赫-曾德尔干涉仪的输入态,它们具有相同的相位分辨率. 图 3 给出了 Fock 态取不同的光子数时,相位测量精度随输入态的总光子数的变化曲线. 可以看出,干涉仪一端输入处于自由热态的高强度热光束,另一端输入 Fock 态,相位测量精度超越了标准量子极限,且测量精度随着 N 取值的增大而提高的更多. 当然,自由热态的总光子数持续提高时,相位测量精度接近海森堡极限,与上文中的理论分析相一致. 需要说明的是,具有相同光子数的相干态代替自由热态与 Fock 态的直积态作为干涉仪的输入态,在待测相位很小时,可以得到几乎相同的相位测量精度. 但是在待测相位变大的情况下,两种输入态所对应的相位测量精度就有所差异;与文献[23]相对比,具有相同光子数的相干态与 Fock 态作为干涉仪的输入态时,对应的测量精度会更好一些.

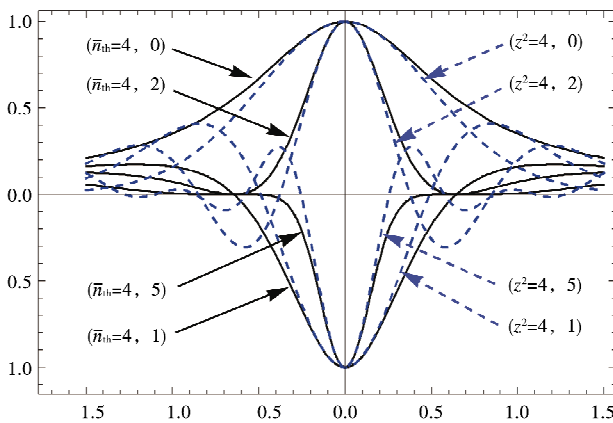


图 2 具有相同光子数的自由热态或相干态与 Fock 态作为马赫-曾德尔干涉仪的输入态时,宇称测量信号随待测相位的变化曲线

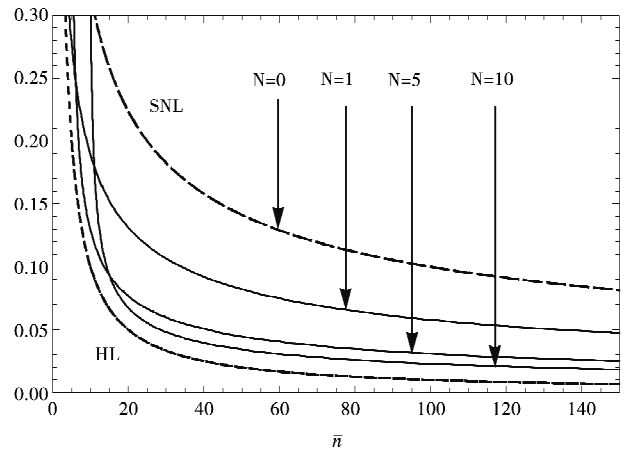


图 3 在 Fock 态的光子数取不同值时,相位测量精度随输入态总的光子数变化曲线. 上面的虚线 SNL 表示标准量子极限,最下面的虚线 HL 表示海森堡极限

3 结论

本文主要计算给出了压缩热态与 Fock 态作为干涉仪的输入态时,相应的宇称测量解析结果,它为研究相位的测量精度提供了方便. 基于宇称测量解析解,本文解析地得到了相位测量精度的极限,该结果与基于量子 Fisher 信息所给出的量子 Crámer-Rao 界限相一致. 特别地,考虑到处于自由热态的热光束是一种更为普遍的光源,进而研究了自由热态与 Fock 态作为干涉仪的输入态时的宇称测量结果. 研究结果表明,自由热态或相干态与 Fock 态作为干涉源时,都可以得到相同的相位测量精度极限. 因此,自由热态与其它非经典态相结合在量子精密测量中也有潜在的应用价值.

参 考 文 献

- [1] Cronin A, Schmiedmayer J, Pritchard D E. Optics and interferometry with atoms and molecules[J]. *Rev Mod Phys*, 2009, 81(3): 1 051-1129.
- [2] Schnabel R, Mavalvala N, McClelland D E, et al. Quantum metrology for gravitational wave astronomy[J]. *Nat Commun*, 2010, 1(8): 121.
- [3] Gerry C C, Knight P L. *Introductory quantum optics*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.
- [4] Ou Z Y. Complementarity and fundamental limit in precision phase measurement[J]. *Phys Rev Lett*, 1996, 77(12): 2352-2355.
- [5] Holland M J, Burnett K. Interferometric detection of optical phase shifts at the Heisenberg limit[J]. *Phys Rev Lett*, 1993, 71(9): 1355-1358.
- [6] Caves C M. Quantum-mechanical noise in an interferometer [J]. *Phys Rev D*, 1981, 23(8): 1693-1708.
- [7] Ou Z Y. Fundamental quantum limit in precision phase measurement[J]. *Phys Rev A*, 1997, 55(4): 2598-2609.
- [8] Bollinger J J, Itano W M, Wineland D J, et al. Optimal frequency measurements with maximally correlated states[J]. *Phys Rev A*, 1996, 54(6): R4649-R4652.
- [9] Dunningham J, Kim T. Using quantum interferometers to make measurements at the Heisenberg limit[J]. *J Mod Opt*, 2006, 53(5): 557-571.
- [10] Higgins B L, Berry D W, Bartlett S D, et al. Entanglement-free Heisenberg-limited phase estimation[J]. *Nature*, 2007, 450(7168): 393-396.
- [11] Lee H, Kok P, Dowling J P. A quantum Rosetta stone for interferometry[J]. *J Mod Opt*, 2002, 49(14): 2325-2338.
- [12] Gerry C C, Benmoussa A, Campos R A. Nonlinear interferometer as a resource for maximally entangled photonic states: Application to interferometry[J]. *Phys Rev A*, 2002, 66(1): 013804.
- [13] Mitchell M W, Lunde J S, Steinberg A M. Super-resolving phase measurements with a multiphoton entangled state[J]. *Nature*, 2004, 429(6 988):161-164.
- [14] Xiang G Y, Higgins B L, Berry D W, et al. Entanglement-enhanced measurement of a completely unknown optical phase[J]. *Nat Phot*, 2011, 5(1): 43-47.
- [15] Demkowicz-Dobrzanski R, Jarzyna M, Kolodynski J. Quantum limits in optical interferometry[J]. *Prog Opt*, 2015, 60: 345.
- [16] Lee S Y, Lee C W, Lee J, et al. Quantum phase estimation using path-symmetric entangled states[J]. *Sci Rep*, 2016, 6: 30306.
- [17] Ferri F, Magatti D, Gatti A, et al. High-resolution ghost image and ghost diffraction experiments with thermal light[J]. *Phys Rev Lett*, 2005, 94(18): 183602.
- [18] Valencia A, Scarcelli G, D'Angelo M, et al. Two-photon imaging with thermal light[J]. *Phys Rev Lett* 2005, 94(6): 063601.
- [19] Lloyd S. Enhanced sensitivity of photodetection via quantum illumination[J]. *Science*, 2008, 321(5895): 1463-1465.
- [20] Chekhova M V, Kulik S P, Penin A N, et al. Intensity interference in Bragg scattering by acoustic waves with thermal statistics[J]. *Phys Rev A*, 1996, 54(6): R4645-R4648.
- [21] Ma X P, You C L, Adhikari S, et al. Sub-shot-noise-limited phase estimation via SU(1,1) interferometer with thermal states[J]. *Opt Exp*, 2018, 26(4):18492-18504.
- [22] Pezzé L, Smerzi A. Ultrasensitive Two-mode interferometry with single-mode number squeezing[J]. *Phys Rev Lett*, 2013, 110(16): 163604.
- [23] Wang S, Wang Y T, Zhai L J, et al. Two-mode quantum interferometry with a single-mode Fock state and parity detection[J]. *J Opt Soc Am B*, 2018, 35(5): 1046-1053.
- [24] Tan Q S, Liao J Q, Wang X G, et al. Enhanced interferometry using squeezed thermal states and even or odd states[J]. *Phys Rev A*, 2014, 89(5): 053822.
- [25] Schleich W P. *Quantum optics in phase space*[M]. Berlin: Wiley-VCH Press, 2001.
- [26] Yurke B, McCall S L, Klauder J R. SU(2) and SU(1, 1) interferometers[J]. *Phys Rev A*, 1986, 33(6): 4033-4054.
- [27] Ekert A K, Knight P L. Relationship between semiclassical and quantum-mechanical input-output theories of optical response[J]. *Phys Rev A*, 1991, 43(7): 3 934-3 938.
- [28] Xu X X, Jia F, Hu L Y, et al. Quantum interference between an arbitrary-photon Fock state and a coherent state[J]. *J Mod Opt*, 2012, 59(18): 1624-1633.
- [29] Seshadreesan K P, Anisimov P M, Lee H, et al. Parity detection achieves the Heisenberg limit in interferometry with coherent mixed with squeezed vacuum light[J]. *New J Phys*, 2011, 13(8): 083 026.
- [30] Gerry C C, Mimih J. The parity operator in quantum optical metrology[J]. *Contemp Phys*, 2010, 51(6): 497-511.
- [31] Barnett S M, Radmore P M. *Methods in theoretical quantum optics*[M]. Oxford: Oxford University Press, 1997.
- [32] Royer A. Wigner function as the expectation value of a parity operator[J]. *Phys Rev A*, 1977, 15 (2): 449-450.

- [6] Luecke G, Chen H, Coyle J, et al. MPI-check; a tool for checking Fortran 90 MPI programs[J]. *Concurrency and Computation; Practice and Experience*, 2003, 15(2): 93-100.
- [7] Falzone C, Chan A, Lusk E, et al. Collective error detection for MPI collective operations[C]. //European Parallel Virtual Machine/Message Passing Interface Users' Group Meeting, 2005.
- [8] Vakkalanka S S, Sharma S, Gopalakrishnan G, et al. ISP; A tool for model checking MPI programs[C]. //The 13th ACM sigplan Symposium on Principles and Practice of Parallel Programming, 2008.
- [9] Vo A. Scalable formal dynamic verification of MPI programs through distributed causality tracking[D]. PhD dissertation, University of Utah, School of Computing, March, 2011.
- [10] Vetter J S, De Supinski B R. Dynamic software testing of MPI applications with umpire[C]. //The 2000 ACM/IEEE Conference on Supercomputing, 2000.
- [11] Hilbrich T, De Supinski B R, Schulz M, et al. A graph based approach for MPI deadlock detection[C]. //The 23rd International Conference on Supercomputing, 2009.
- [12] Souza S R S, Vergilio S R, Souza P S L. Structural testing criteria for message-passing parallel programs[J]. *Concurrency and Computation; Practice and Experience*, 2008, 20: 1893-1916.
- [13] Souza P S L, Souza S R S, Zaluska E. Structural testing for message-passing concurrent programs an extended test model[J]. *Concurrency and Computation; Practice and Experience*, 2013, 25(18): 149-158.
- [14] Tian T, Gong D. Evolutionary generation approach of test data for multiple paths coverage of message-passing parallel programs[J]. *Chinese Journal of Electronics*, 2014, 23(2): 291-296.
- [15] Gong D, Yao X. Testability transformation based on equivalence of target statements[J]. *Neural Computing and Applications*, 2012, 21(8): 1871-1882.
- [16] Yao X, Gong D, Luo Y, et al. Test data reduction based on dominance relations of target statements[C]. //IEEE Congress on Evolutionary Computation, 2012.

Deadlock Detection of Parallel Programs based on Dominance Relation

TIAN Tian GUO Qing ZHANG Chen

(School of Computer Science and Technology, Shandong Jianzhu University, Jinan 250101, China)

Abstract MPI parallel programs have been applied broadly and their reliability has attracted more and more attention from the software engineering community. A MPI parallel program contains several processes, each of which has a series of statements executed sequentially. The deadlock is a typical error that occurs in parallel programs. This study proposes a method of detecting deadlocks based on dominance relation. Firstly, the dominance relations of communication edges are firstly conducted from those of communication statements. Secondly, the deadlock is detected by checking the dominance relations of communication edges. The proposed method is preliminarily implemented and used for detecting several MPI parallel programs. The experimental results verify the effectiveness of the proposed method.

Key words parallel programs; dominance relation; deadlock; communication edge

(上接第 82 页)

Phase Estimation with Thermal State and Fock State via Parity Detection

WANG Shuai WU Shi-chen SUI Yong-xing

(School of Mathematics and Physics, Jiangsu University of Technology, Changzhou 213001, China)

Abstract In quantum precision based optical interferometer, the phase sensitivity crucially depends on the nature of the quantum state. We analytically prove when a Mach-Zehnder interferometer powered by a Fock state into one input port, a thermal state, a squeezed vacuum state or a squeezed thermal state with same average photon number at the other input, the same performances in the phase estimation via parity detection can be obtained for small phase shift. We analytically prove that the parity detection saturates the quantum Cramér-Rao bound. In addition, our results show that besides a coherent state, a thermal state is another useful high-intensity classical state for the phase estimation.

Key words quantum precision; Mach-Zehnder interferometer; parity detection; thermal state; Fock state