第 31 卷 第 4 期
2018 年 12 月

聊城大学学报(自然科学版)
Journal of Liaocheng University(Nat. Sci.)

Vol. 31 No. 4
Dec. 2018

文章编号 1672-6634(2018)04-0072-05 DOI 10.19728/j.issn1672-6634.2018.04.013

基于模糊化邻域系的粗糙近似算子(Ⅱ)
——公理刻画①

金 秋 蒋惜珂 李令强

(聊城大学 数学科学学院,山东 聊城 252059)

摘 要 研究了基于模糊化邻域系的粗糙近似算子的公理刻画问题. 特别地,通过一组公理集分别刻画了由串行的、反身的、一元的和传递的模糊化邻域系生成的粗糙近似算子.

关键词 模糊集;粗糙集;模糊化邻域系;近似算子;公理化

中图分类号 O159.1 **文献标识码** A

0 引言

粗糙集理论是由 Pawlak[1] 引入的一种处理不确定现象的数学工具,其理论与应用的基础是一对近似算子. Pawlak 粗糙近似算子是基于等价关系的,后来把等价关系推广为二元(模糊)关系或(模糊)覆盖[2-9]以及更一般的邻域系[10,11],人们引入了更为广泛的粗糙近似算子. 一般的,有两种方法来研究近似算子——构造性方法和公理化方法. 在构造性方法中,通过把论域上的二元(模糊)关系、(模糊)覆盖和邻域系视为原始的概念来构造、研究粗糙近似算子[2-5,10]. 另一方面,在公理化方法中,把抽象的算子作为初始概念,通过一个公理集来刻画构造方式定义的近似算子[2,6,8,9,11]. 2018 年,作者在文献[12]中构造了基于模糊化邻域系的粗糙近似算子,并证明了该理论涵盖基于邻域系的粗糙近似算子作为其特殊情形. 而由文献[10,11]知基于二元关系(覆盖)的粗糙近似算子可视为特殊的基于邻域系的粗糙近似算子. 因此,基于模糊化邻域系的粗糙近似算子涵盖众多的粗糙近似算子作为其特殊情形,故对此展开研究所取得的结果更具普遍意义. 本文是文献[12]中工作的继续,具体来说,我们将研究基于模糊化邻域系的粗糙近似算子的公理化问题.

设 U 为非空论域,$I=[0,1]$ 为单位区间. 记 2^U 为 U 的幂集,I^U 为 U 的模糊集之集. 任意 $A\in 2^U$ 都可以看做 U 上的模糊集 1_A: $\forall x\in U$, 若 $x\in A$,则 $1_A(x)=1$; 否则 $1_A(x)=0$. 通常称 1_A 为 A 的特征函数. 对于任意的 $E\subseteq[0,1]$,我们记 $\vee E$ ($\wedge E$)为 E 的上(下)确界. 特别地,当 $E=\{a,b\}$ 时,我们把它们记作 $a\vee b$ 和 $a\wedge b$. 任取 $\{A_t\}_{t\in T}\subseteq I^U$,定义 $\bigvee_{t\in T}A_t$, $\bigwedge_{t\in T}A_t\in I^U$ 为: $(\bigvee_{t\in T}A_t)(x)=\bigvee_{t\in T}A_t(x)$, $(\bigwedge_{t\in T}A_t)(x)=\bigwedge_{t\in T}A_t(x)$.

任取 $A\in I^U$ 和 $a\in I$,定义 $A_{[a]}=\{x\in U\mid A(x)\geqslant a\}$ 和 $A_{(a)}=\{x\in U\mid A(x)>a\}$;分别称为 A 的 a- 截集和强 a- 截集.

对于任意的 $X\in 2^U$,记 $X'=\{x\in U\mid x\notin X\}$ 为 X 的补集. 对于任意的 $A,B\in I^U$, 定义 $(A-B)\in I^U$ 为 $\forall x\in U,(A-B)(x)=A(x)-B(x)$.

1 基于模糊化邻域系的粗糙近似算子

定义 1[12] 设 $N:U\to I^{2^U}$ 为论域 U 上的一个函数. 若 $\forall x\in U, N(x):2^U\to I$ 是非空的,即 $\bigvee_{K\in 2^U}$

---

① 收稿日期:2018-05-20

基金项目:国家自然科学基金资助课题(11801248,11501278,11471152)资助

通讯作者:李令强,男,汉族,博士,副教授,研究方向:模糊数学及其应用,E-mail:lilingqiang@126.com.

$N(x)(K)=1$,则称 N 为 U 上的模糊化邻域系. 并称序对 (U,N) 为一个模糊化邻域空间. 这里,$N(x)(K)$ 解释为 K 是 x 的一个邻域的程度.

定义 2[12]　设 (U,N) 为一个模糊化邻域空间. X 为 U 中任意子集,其上、下近似 $\overline{N}(X),\underline{N}(X)\in I^U$ 分别定义为

$$\forall x\in U,\overline{N}(X)(x)=\bigwedge_{K\cap X=\varnothing}(1-N(x)(K));\underline{N}(X)(x)=\bigvee_{K\subseteq X}N(x)(K).$$

定理 1[12]　设 N 为 U 上的一个模糊化邻域系,则 $\forall X\subseteq U,\forall a\in I$ 有

(1) $\underline{N}(\varnothing)=1_{\varnothing},\underline{N}(U)=1_U$, (2) $X\subseteq Y\Rightarrow\underline{N}(X)\leqslant\underline{N}(Y),\overline{N}(X)\leqslant\overline{N}(Y)$,

(3) $1_U-\underline{N}(X')=\overline{N}(X)$, (4) $1_U-\overline{N}(X')=\underline{N}(X)$, (5) $\underline{N}(X')_{(1-a)}=(\overline{N}(X)_{[a]})'$,

(6) $\overline{N}(X)_{[a]}=(\underline{N}(X')_{(1-a)})',\underline{N}(X)_{(1-a)}=(\overline{N}(X')_{[a]})'$.

定义 3[12]　设 N 为 U 上的一个模糊化邻域系

(1) 如果对于任意的 $x\in U$ 都有 $N(x)(\varnothing)=0$,则称 N 是串行的.

(2) 如果对于任意的 $x\in U,K\in 2^U$ 都有 $N(x)(K)>0$ 蕴涵着 $x\in K$,则称 N 是反身的. 易见“$N(x)(K)>0$ 蕴涵着 $x\in K$”与“$x\notin K$ 蕴涵着 $N(x)(K)=0$”是等价的.

(3) 如果对于任意的 $x\in U,K\in 2^U$,有

$$N(x)(K)\leqslant\bigvee_{V\in 2^U}\{N(x)(V)\wedge[\bigwedge_{y\in V}\bigvee_{V_y\subseteq K}N(y)(V_y)]\}$$

则称 N 是传递的.

(4) 如果对于任意的 $x\in U$ 和任意的 $K,V\subseteq X$,有

$$N(x)(K)\wedge N(x)(V)\leqslant\bigvee_{M\subseteq K\cap V}N(x)(M),$$

则称 N 是一元的.

定理 2[12]　设 N 为 U 上的一个模糊化邻域系

(1) N 是串行的 $\Leftrightarrow\underline{N}(\varnothing)=1_{\varnothing}\Leftrightarrow\overline{N}(U)=1_U$.

(2) N 是反身的 $\Leftrightarrow\forall X\subseteq U,\underline{N}(X)\leqslant 1_X\Leftrightarrow\forall X\subseteq U,\overline{N}(X)\geqslant 1_X$.

(3) N 是传递的 $\Leftrightarrow\forall X\subseteq U,\forall a\in I,\underline{N}(X)_{(a)}\subseteq\underline{N}(\underline{N}(X)_{(a)})_{(a)}$,

$\Leftrightarrow\forall X\subseteq U,\forall a\in I,\overline{N}(X)_{[a]}\supseteq\overline{N}(\overline{N}(X)_{[a]})_{[a]}$.

(4) N 是一元的 $\Leftrightarrow\forall X,Y\subseteq U,\underline{N}(X\cap Y)=\underline{N}(X)\wedge\underline{N}(Y)$,

$\Leftrightarrow\forall X,Y\subseteq U,\overline{N}(X\cup Y)=\overline{N}(X)\vee\overline{N}(Y)$.

注记 1　本文中串行、反身、传递和一元条件分别是文献[11]中邻域系相应概念的自然推广.

2　上近似算子的公理刻画

本节,我们将用一个公理集来刻画基于模糊化邻域系的粗糙上近似算子.

定理 3　设 $f:2^U\to I^U$ 为一个算子(或者称为函数). 则存在模糊化邻域系 N 使得 $f=\overline{N}$ 当且仅当 f 满足 (U1):$f(\varnothing)=1_{\varnothing}$,(U2):$A\subseteq B\Rightarrow f(A)\leqslant f(B)$.

证明　($\Rightarrow$) 由定理 1 得到.

($\Leftarrow$) 设 $f:2^U\to I^U$ 为一个满足 (U1) 和 (U2) 的算子. 定义函数 $N_f:U\to I^{2^U}$

$$\forall x\in U,A\in 2^U,N_f(x)(A)=\bigvee_{B\subseteq A}(1-f(B')(x)).$$

由 (U1) 知对于任意的 $x\in U$,有

$$N_f(x)(U)\geqslant 1-f(U')(x)=1-f(\varnothing)(x)=1.$$

故 $N_f(x)$ 是非空的. 因此 N_f 是 U 上的一个模糊化邻域系.

接下来,我们验证 $\overline{N_f}=f$. 事实上,对于任意的 $x\in U$ 和任意的 $A\in 2^U$,

$$\overline{N_f}(x)(A)=\bigwedge_{K\cap A=\varnothing}(1-N_f(x)(K))=\bigwedge_{K\cap A=\varnothing}(1-\bigvee_{B\subseteq K}(1-f(B')(x)))$$

$$=\bigwedge_{K\cap A=\varnothing}\bigwedge_{B\subseteq K}f(B')(x)=\bigwedge_{A\subseteq K'}\bigwedge_{K'\subseteq B'}f(B')(x)\overset{(U2)}{=}f(A)(x).$$

定理 4　设 $f:2^U\to I^U$ 为一个算子. 则存在一个串行的模糊化邻域系 N,使得 $f=\overline{N}$,当且仅当 f 满

足条件(U1),(U2)和(U3):$f(U)=1_U$.

证明 ($\Rightarrow$)设 N 为 U 上的一个串行的模糊化邻域系且 $f=\overline{N}$. 由定理2(1)和定理3得 $f=\overline{N}$ 满足(U1),(U2)和(U3).

($\Leftarrow$)设 f 为满足(U1),(U2)和(U3)的一个算子,N_f 如同定理3所定义. 只需检验(U3)蕴涵着串行条件. 事实上,对于每一个 $x\in U$,由 $f(\varnothing')=f(U)=1_U$ 知

$$N_f(x)(\varnothing)=\bigvee_{B\subseteq\varnothing}(1-f(B')(x))=1-f(\varnothing')(x)=0,$$

即 N_f 是串行的.

定理5 设 $f:2^U\to I^U$ 为一个算子. 则存在一个反身的模糊化邻域系 N 使得 $f=\overline{N}$ 当且仅当 f 满足(U1),(U2)和(U4):$\forall A\in 2^U,1_A\leqslant f(A)$.

证明 ($\Rightarrow$)令 N 为 U 上的一个反身的模糊化邻域系,且 $f=\overline{N}$. 那么由定理2(2)和定理2.1可得 $f=\overline{N}$ 满足(U1),(U2)和(U4).

($\Leftarrow$)设 f 为一个满足(U1),(U2)和(U4)的算子,N_f 如同定理3中所定义. 易见只需验证(U4)蕴涵着反身条件. 事实上,假设 $x\notin A$,由 N_f 的定义知

$$N_f(x)(A)=\bigvee_{B\subseteq A}(1-f(B')(x))\overset{(U2)}{=}1-f(A')(x)\overset{(U4)}{\leqslant}1-1_{A'}(x)=0.$$

因此 $N_f(x)(A)=0$,即 N_f 是反身的.

引理1 设 $a,b\in I$,则 $a\leqslant b$ 当且仅当 $\forall c<a$ 有 $c\leqslant b$.

定理6 设 $f:2^U\to I^U$ 为一个算子. 则存在传递的模糊化邻域系 N 使得 $f=\overline{N}$ 当且仅当 f 满足(U1),(U2)和(U5):$\forall a\in I,\forall A\in 2^U,f(A)_{[a]}\supseteq f(f(A)_{[a]})_{[a]}$.

证明 ($\Rightarrow$)设 N 为 U 上的一个传递的模糊化邻域系,且 $f=\overline{N}$. 那么由定理2(3)和定理3可得 $f=\overline{N}$ 满足(U1),(U2)和(U5).

($\Leftarrow$)设 f 为一个满足(U1),(U2)和(U5)的算子,N_f 如同定理3中所定义. 易见只需验证(U5)蕴涵着传递条件. 对于任意的 $x\in U$ 和 $A\in 2^U$,令 $a=N_f(x)(A)$,

$$b=\bigvee_{K\in 2^U}(N_f(x)(K)\wedge[\bigwedge_{y\in K}\bigvee_{V_y\subseteq K}N_f(y)(V_y)]).$$

我们只需验证 $a\leqslant b$ 即可.

如果 $a=0$,那么 $a\leqslant b$ 自然成立.

如果 $a\neq 0$,任取 $c<a=N_f(x)(A)$. 由 $A\cap A'=\varnothing$ 得

$$\overline{N_f}(A')(x)=\bigwedge_{K\cap A'=\varnothing}(1-N_f(x)(K))\overset{(U2)}{\leqslant}1-N_f(x)(A)<1-c,$$

即,$x\notin\overline{N_f}(A')_{[1-c]}=f(A')_{[1-c]}$. 由(U5)得

$$x\notin f(f(A')_{[1-c]})_{[1-c]}=\overline{N_f}(\overline{N_f}(A')_{[1-c]})_{[1-c]}.$$

由定义2得

$$\overline{N_f}(\overline{N_f}(A')_{[1-c]})(x)=\bigwedge_{K\cap\overline{N_f}(A')_{[1-c]}=\varnothing}(1-N_f(x)(K))=1-\bigvee_{K\cap\overline{N_f}(A')_{[1-c]}=\varnothing}N_f(x)(K)<1-c,$$

即

$$c<\bigvee_{K\cap\overline{N_f}(A')_{[1-c]}=\varnothing}N_f(x)(K).$$

由此知存在一个 $K\in 2^U$ 使得 $c<N_f(x)(K)$ 且 $K\cap\overline{N}(A')_{[1-c]}=\varnothing$. 因此,$\forall y\in K$ 有 $y\notin\overline{N}(A')_{[1-c]}$. 由定义2得

$$\overline{N}(A')(y)=\bigwedge_{V\cap A'=\varnothing}(1-N_f(y)(V))=1-\bigvee_{V\cap A'=\varnothing}N_f(y)(V)<1-c,$$

即

$$c<\bigvee_{V\cap A'=\varnothing}N_f(y)(V)=\bigvee_{V\subseteq A}N_f(y)(V).$$

由此得对于任意的 $y \in K$ ，$\exists V_y \in 2^U$ 使得 $V_y \subseteq A$ 且 $c < N_f(y)(V_y)$.

综上得

$$c \leqslant N_f(x)(K) \wedge [\bigwedge_{y \in K} \bigvee_{V_y \subseteq K} N_f(y)(V_y)] \leqslant \bigvee_{K \in 2^U} (N_f(x)(K) \wedge [\bigwedge_{y \in K} \bigvee_{V_y \subseteq K} N_f(y)(V_y)]) = b.$$

再由引理 3 得 $a \leqslant b$.

定理 7　设 $f: 2^U \to I^U$ 为一个算子. 则存在一元的模糊化邻域系 N 使得 $f = \overline{N}$ 当且仅当 f 满足(U1), (U2)和 (U6): $\forall X, Y \in 2^U, f(X \cup Y) = f(X) \vee f(Y)$.

证明　(⇒) 设 N 为 U 上的一个一元模糊化邻域系且 $f = \overline{N}$. 则由定理 2(4)和定理 3 可得 $f = \overline{N}$ 满足(U1),(U2)和(U6).

(⇐) 设 f 为一个满足(U1),(U2)和(U6)的算子，N_f 如同定理 3 中所定义. 易见我们只需验证(U6)蕴涵着一元条件. 对于任意的 $x \in U$ 和 $K, V \in 2^U$，设 $a = N_f(x)(K) \wedge N_f(x)(V)$ 和 $b = \bigvee_{M \subseteq K \cap V} N_f(M)$，我们只需检验 $a \leqslant b$.

如果 $a = 0$ ，那么 $a \leqslant b$ 显然成立.

如果 $a \neq 0$ ，那么任取 $c < a$. 由

$$a = N_f(x)(K) \wedge N_f(x)(V) = \bigvee_{B \subseteq K} (1 - f(B')(x)) \wedge \bigvee_{C \subseteq V} (1 - f(C')(x)),$$

知存在 $B \subseteq K$ ，$C \subseteq V$ 使得 $c < 1 - f(B')(x)$ 且 $c < 1 - f(C')(x)$ ，由(U6)得

$$c < (1 - f(B')(x)) \wedge (1 - f(C')(x)) = 1 - (f(B')(x) \vee f(C')(x)) = 1 - f((B \cap C)')(x).$$

再由 N_f 的定义和 $B \cap C \subseteq K \cap V$ 得

$$c < 1 - f((B \cap C)')(x) \leqslant N_f(x)(K \cap V) \leqslant \bigvee_{M \subseteq K \cap V} N_f(x)(M) = b.$$

由引理 3 得 $a \leqslant b$.

3　下近似算子的公理刻画

根据上近似算子的公理化刻画，类似可得下近似算子的公理化刻画. 在此，我们只给出主要结论而略去了相似的证明.

定理 8　设 $f: 2^U \to I^U$ 为一个算子. 则存在模糊化邻域系 N 使得 $f = \underline{N}$ 当且仅当 f 满足

$$(\mathrm{L1}): f(U) = 1_U, (\mathrm{L2}): A \subseteq B \Rightarrow f(A) \leqslant f(B).$$

证明　我们只给出 f 诱导的模糊化邻域系 N 的定义

$$\forall x \in U, A \in 2^U, N_f(x)(A) = \bigvee_{B \subseteq A} f(B)(x) .$$

定理 9　设 $f: 2^U \to I^U$ 为一个算子，则

(1) 存在串行的模糊化邻域系 N 使得 $f = \underline{N}$ 当且仅当 f 满足(L1),(L2)和 (L3): $f(\varnothing) = 1_{\varnothing}$.

(2) 存在反身的模糊化邻域系 N 使得 $f = \underline{N}$ 当且仅当 f 满足(L1),(L2)和 (L4): $\forall X \in 2^U, f(X) \leqslant 1_X$.

(3) 存在传递的模糊化邻域系 N 使得 $f = \underline{N}$ 当且仅当 f 满足(L1),(L2)和 (L5): $\forall X \in 2^U, \forall a \in I$, $\underline{N}(X)_{(a)} \subseteq \underline{N}(\underline{N}(X)_{(a)})_{(a)}$.

(4) 存在一元的模糊化邻域系 N 使得 $f = \underline{N}$ 当且仅当 f 满足(L1),(L2)和 (L6): $\forall X, Y \in 2^U, f(X \cap Y) = f(X) \wedge f(Y)$.

4　结语

本文接文献[10]建立了一个基于模糊化邻域系的粗糙集模型，研究了其基本性质和公理化问题. 证明了该模型包含一些重要的粗糙集，特别是基于邻域系的粗糙集作为其特例. 基于邻域系的粗糙近似算子具有很好的应用背景. 在未来的工作中，我们将探索基于模糊化邻域系的粗糙近似算子潜在的应用. 此外，文献[14]和[15]指出基于二元关系(覆盖)的近似算子与模态逻辑中的模态算子密切相关. 在未来的工作中，我们也将尝试建立基于(模糊化)邻域系的近似算子与模态逻辑之间的联系.

参 考 文 献

[1] Pawlak Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982, 11: 341-356.

[2] Yao Y Y. Constructive and algebraic methods of the theory of rough sets[J]. Information Sciences,1998, 109:21-47.

[3] Zhu W. Relationship between generalized rough sets based on binary relation and covering[J]. Information Sciences,2009, 179:210-225.

[4] Wu W Z, Zhang W X. Constructive and axiomatic approaches of fuzzy approximation operators[J]. Information Sciences,2004,159:233-254.

[5] 李令强,金秋,孙守斌,等. 多值近似空间的上下近似诱导的拓扑结构[J]. 系统科学与数学, 2012,32(2): 226-236.

[6] She Y H, Wang G J. An axiomatic approach of fuzzy rough sets based on residuated lattices[J]. Computers and Mathematics with Applications,2009,58:189-201.

[7] 苏庆雪,李令强,孟广武. k阶区间值模糊粗集[J]. 聊城大学学报(自然科学版),2013,26(1):16-20+25.

[8] 李令强, 李庆国. 格值模糊下近似算子的唯一公理刻画[J]. 山东大学学报(理学版), 2014, 49(10): 78-82.

[9] Li L Q, Jin Q, Hu Kai,et al. The axiomatic characterizations on L-fuzzy covering-based approximation operators[J]. International Journal of General Systems,2017,46 (4): 332-353.

[10] Zhang Y L, Li C Q, Lin M L,et al. Relationships between generalized rough sets based on covering and reflexive neighborhood system[J]. Information Sciences,2015, 319:56-67.

[11] Zhao F F, Li L Q. Axiomatization on generalized neighborhood system-based rough sets[J]. Soft Computing, 2018,22(18):6099-6110.

[12] 金秋,蒋惜珂,李令强. 基于模糊化邻域系的粗糙近似算子(Ⅰ)[J]. 大学数学, 2018,(4):1-5.

[13] 黄丽萍. 不完备序信息系统的集对优势度粗糙集模型[J]. 聊城大学学报(自然科学版), 2017, 30(1): 97-101.

[14] Yao Y Y , Lin T Y. Generalization of rough sets using modal logic[J]. Intelligent Automation and Soft Computing, an International Journal, 1996,2:103-120.

[15] Ma M H,Chakraborty M K. Covering-based rough sets and modal logic Part I[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2016, 77:55-65.

Fuzzifying Neighborhood Systems-based Rough Approximation Operators (Ⅱ) ——Axiomatic Characterization

JIN Qiu　JIANG Xi-ke　LI Ling-qiang

(School of Mathematical Sciences, Liaocheng University, Liaocheng 252059, China)

Abstract　In this paper, we present an axiomatic study on fuzzifying neighborhood system-based rough approximation operators. In particular, by an axiomatic set, we characterize the rough approximation operators generated by serial, reflexive, unary and transitive fuzzifying neighborhood systems, respectively.

Key words　fuzzy set; rough set; fuzzifying neighborhood systems; approximation operators; axiomatic characterization