文章编号　1672-6634(2018)04-0058-07　　**DOI**　10.19728/j.issn1672-6634.2018.04.011

广义对称表的定义和哲学意义①

张应山[1]　赵建立[2]

(1. 华东师范大学 经济与管理学部 统计学院,上海 200241;2.聊城大学 数学科学学院,山东 聊城 252059)

摘　要　基于《多边矩阵理论》,由东方整体性思维所启迪,试图提供并完善一套从整体到局部处理复杂系统对称多指标问题、对称非均匀性问题、对称非线性问题的强有力的数学工具,并对其进行严格的理论推导和证明.广义对称性或广义对称分析方法,是许多学科关注的问题之一,在研究广义对称性问题时,构造一个广义对称表成为研究广义对称性问题的基础.作为系列论文的第一篇,本文利用自由函数模型,根据正交幂等系统,采取对称置换不变性作为平衡指标,定义广义对称表,并从哲学层面讨论它的哲学意义.

关键词　广义对称表;正交幂等系统;自由函数模型;对称置换不变性;对称矩阵象

中图分类号　O212.6　　**文献标识码**　A

对称性是指对研究对象在视觉特征方面的形状和设计.目前关于对称性的研究基本上是限于图像的对称性和函数的对称性的研究.所有的对称性研究都和有限群的研究密切相关.譬如在图像的对称性的研究[1-7]方面,除了研究群与图的对称性[1-3]之外,还研究网络图的容错性[4,5]、图像分割及可视化[6]和曲面嵌入[7]等.又譬如在函数的对称性的研究[8-14]方面,主要涉及有限群的特征标表的研究[8-12],但也有关于对称函数的特殊性质(如 Schur 凸性[13,14])的研究.广义对称性或广义对称分析方法是《多边矩阵理论》[15]提出的对称函数研究的概念,它主要是把有限群的特征标表推广成为广义对称算符表和广义对称表,利用统计分析的方法来研究对称函数.在《多边矩阵理论》[15]提出对称框架和对称算符概念以后,论文[16]提出了饱和正交幂等系统的概念,论文[17]研究了饱和正交幂等系统的构造.论文[18]研究了多元函数空间的对称性分解.论文[19]和[20]研究了对称性全局统计分析中的定理证明.在系列论文[21-27]中提出了对称框架的剖分定理、对称框架的分解定理,并利用分解定理提出了构造对称框架的一种方法,如此等等.在硕士学位论文[28]和[29]中,更是对于对称设计表的构造和数据分析进行了进一步的研究.但前述关于对称性的研究一般只是限于对称表的研究,还没有涉及广义对称表的研究.

广义对称性或广义对称分析方法是众多学科关注的重要问题之一,广义对称表在现实生活中常常遇到,凡是与广义对称性有关的问题,都是在广义对称表下进行研究的.在研究广义对称性问题时,构造广义对称表成为研究广义对称性问题的基础.而广义对称性问题与有限群的关系最为密切,结合群论对广义对称性问题做一般处理,是处理广义对称性问题的主要手法.广义对称表作为试验设计的使用表,它首先应该满足的是试验设计的基本原理再现性.也就是说,在已经知道函数的广义对称性的前提下,用任何一个具有可识别性的广义对称表进行统计分析得到的对称性结论与客观实际基本相符合,俗称客观一致性;而在不知道函数的广义对称性的前提下,用任何两个具有可识别性的广义对称表进行统计分析得到的两个结论也是基本相符合的,俗称重复出现性.客观一致性和重复出现性统称再现性.

再现性是试验设计对试验设计表的基本要求.对于同样的对称性试验设计问题,试验设计工作者所选取的对称性试验设计表可以是多种多样的.如果试验设计表不具有再现性,那么就不能保证其试验设计的

①　收稿日期:2018-03-29
基金项目:国家自然科学基金项目(11301247);教育部高等学校博士学科点专项基金资助项目(20080269l021)资助
通讯作者:张应山,男,汉族,博士,教授,研究方向:概率论与数理统计,E-mail:yszhang@stat.ecnu.edu.cn.

数据分析结论与客观实际相符合，也不能保证相应的数据分析结论可以重复出现. 因为试验设计的数据分析结论必须是稳健的客观事实，只有根据具备再现性的试验设计表获得的数据，所进行的统计分析结论才能称作试验的结论. 只有这样的试验结论才可以重复试验，再现相应的结论. 所有说，对试验设计表的再现性要求是试验设计的基本要求. 基于《多边矩阵理论》[15]，结合各学科关注的广义对称性问题，研究广义对称性或广义对称分析方法. 主要目的是证明广义对称表是具有再现性特点的，解决函数对称分解问题的试验设计数据分析表，具有明显的实用价值. 采用对广义正交表的研究手法[30]，首先研究设计表的平衡性，然后研究其矩阵象的正交性，并利用矩阵象研究其再现性数据分析的性质. 专门研究广义对称表的问题，本文主要通过定义自由函数模型，根据正交幂等系统，采取对称置换不变性作为平衡指标，构造广义对称表，并从哲学层面讨论它的哲学意义.

1　广义对称表的定义

试验设计的研究对象是复杂系统. 20 世纪 30 年代，R. A. Fisher[1] 创立试验设计理论，是基于研究与试验设计本身无关的客观实际问题而提出的. 这个实际问题可归为一般复杂系统的自由函数模型

$$\begin{aligned} &y = f(x_0, x_1, \cdots, x_m, \omega) = g(x_0, x_1, \cdots, x_m) + \varepsilon_g, \\ &g(x_0, x_1, \cdots, x_m) = E(f \mid x_0, x_1, \cdots, x_m), \\ &\varepsilon_g = f - g, \end{aligned} \tag{1}$$

其中 x_0 是区组因子，$x_1, \cdots, x_m$ 是试验因子，ω 是不可观测干扰因子. 另外，函数 f, g, ε_g 和 m 都是未知的. 在平方可积条件下，可观测函数 $g(x_0, x_1, \cdots, x_m)$ 可以进行如下对称分解

$$\begin{aligned} &g(x_0, x_1, \cdots, x_m) = \sum_{l=0}^{k} \psi_l + \psi_\varepsilon, \\ &\psi_0 = Eg, , \psi_1 = \tau_{x_0} = E(g \mid x_0) - Eg, \psi_l = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} x_l(\sigma) g(x_0, x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(m)}), l = 2, \cdots, k. \\ &\psi_\varepsilon = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} g(x_0, x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(m)}) - E(g \mid x_0), \end{aligned} \tag{2}$$

其中 $\psi_0 = E(g) = E(f)$ 是关于 $x_0, x_1, \cdots, x_m$ 的期望，也就是积分 $\int fP(\mathrm{d}x_0 \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_m)$. 而 $\{x_1, \cdots, x_k\}$ 是置换群 $G \subset S_m$ 的饱和正交幂等系统. 称分解(3)为对称分解，是指在 $x_1, \cdots, x_m$ 分布对称的条件下存在

$$Var(f) = Var(g) + Var(\varepsilon_g), Var(g) = \sum_{l=1}^{k} Var(\psi_l) + Var(\psi_\varepsilon). \tag{3}$$

实际问题要求判断 ψ_l 是否近似为 0? 或者在 ψ_l 不是 0 时，求出 ψ_l 的某些函数值? 因为 ψ_l 可积并且 $E\psi_l = 0, \forall\, l = 1, \cdots, k$ ，所以方差 $Var(\psi_l)$ 为 0 当且仅当几乎处处 $\psi_l = 0, \forall\, l = 1, \cdots, k$. 从而，上述判断 ψ_l 是否近似为 0 的问题可以用方差 $Var(\psi_l)$ 或者贡献率 $r_{\psi_l}^{g} = Var(\psi_l)/Var(g)$ (也称全局敏感性指标)的大小来界定. 从而利用 R. A. Fisher 提出的方差分析方法，可用试验数据检验与试验设计本身无关的原假设 $H_0^{\psi_l}: Var(\psi_l) = 0$，并作为试验设计的主要标志之一. 当然在可观测函数 $g(x_0, x_1, \cdots, x_m)$ 已知时，可以用多种数学方法计算分解项 ψ_l 和方差 $Var(\psi_l)$ 或者贡献率 $r_{\psi_l}^{g} = Var(\psi_l)/Var(g)$. 国际上，张应山等团队[6]一直在关注着这个问题，提出有 MC 和伪 MC 等方法. 但试验设计方法主要是在可观测函数 $g(x_0, x_1, \cdots, x_m)$ 未知时，通过试验获得数据，用数据检验上述方差 $Var(\psi_l)$ 是否为 0，并且在方差 $Var(\psi_l)$ 不是 0 时，估计 ψ_l 的某些函数值. 在大多数实际问题中，可观测函数 $g(x_0, x_1, \cdots, x_m)$ 是未知的，甚至试验因子的个数 m 也是未知的，有些试验设计问题本身就不需要求解可观测函数 $g(x_0, x_1, \cdots, x_m)$.

而试验设计的对称分析数据模型应是自由函数模型(1)和(2)派生的模型：

$$\begin{aligned} &y_{ij} = \mu + \alpha_i + \sum_{l=2}^{k} \psi_{ij}^{l} + \varepsilon_{ij}, \mu = Eg = Ef, \\ &\alpha_i = E(g \mid x_0 = x_0(i)) - Eg = E(f \mid x_0 = x_0(i)) - Ef, \\ &\psi_1 = (\psi_{11}^1, \cdots, \psi_{1k_1}^1; \psi_{21}^1, \cdots, \psi_{2k_2}^1; , \cdots, \psi_{b1}^1, \cdots, \psi_{bk_b}^1)^{\mathrm{T}} = block(1_{k_1}, \cdots, 1_{k_b})\alpha, \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_b)^{\mathrm{T}}, \\ &\psi_{ij}^{l} = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} x_l(\sigma) g(x_0(i), x_{\sigma(1)}(b_{ij}^{\sigma(1)}), \cdots, x_{\sigma(m)}(b_{ij}^{\sigma(m)})), \end{aligned}$$

$$\psi_l=(\psi_{11}^l,\cdots,\psi_{1k_1}^l;\psi_{21}^l,\cdots,\psi_{2k_2}^l;,\cdots,\psi_{b1}^l,\cdots,\psi_{bk_b}^l)^{\mathrm{T}},\tag{4}$$

$$\psi_{ij}^{\varepsilon}=\varepsilon_{ij}=\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}g(x_0(i),x_{\sigma(1)}(b_{ij}^{\sigma(1)}),\cdots,x_{\sigma(m)}(b_{ij}^{\sigma(m)}))-E(g\mid x_0=x_0(i)),$$

$$\psi_{\varepsilon}=\varepsilon=(\psi_{11}^{\varepsilon},\cdots,\psi_{1k_1}^{\varepsilon};\psi_{21}^{\varepsilon},\cdots,\psi_{2k_2}^{\varepsilon};,\cdots,\psi_{b1}^{\varepsilon},\cdots,\psi_{bk_b}^{\varepsilon})^{\mathrm{T}},$$

$$E\varepsilon_{ij}=0,Var(\varepsilon_{ij})=\sigma^2,i=1,\cdots,b,j=1,\cdots,k_i,$$

$$l=2,\cdots,k,n=k_1+\cdots+k_b,$$

这里 $x_0(i),x_t(x)$ 是对应试验因子(即自变量) x_0,x_t 设计数码 $1\leqslant i\leqslant b,1\leqslant x\leqslant v_t$ 所取的试验水平,而相应因子的区组设计表记为

$$\begin{aligned}&D_{b\times k}^0(b)=(b_{ij}^0)=[1\,1_{k_1},\cdots,b\,1_{k_b}]^{\mathrm{T}},k=(k_1,\cdots,k_b)_{b\times 1}^{\mathrm{T}},1_{k_i}=(1,\cdots,1)_{k_i\times 1}^{\mathrm{T}},\\&D_{b\times k}^t(v_t)=(b_{ij}^t)=[B_1^t,\cdots,B_b^t]^{\mathrm{T}},b_{ij}^t\in\{1,2,\cdots,v_t\},t=1,\cdots,m.\end{aligned}\tag{5}$$

如果把这些区组设计表按行拉长,并组合在一起,那么可以得到一个 $n\times(m+1)$ 阶矩阵

$$\boldsymbol{H}_n(b_{v_1}^1\cdots v_m)=[Vec(D_{b\times k}^0(b)),Vec(D_{b\times k}^1(v_1),\cdots,Vec(D_{b\times k}^m(v_m))]=[a_0,a_1,\cdots,a_m]\tag{6}$$

称其为相应区组设计的行列设计,区组设计(5)和行列设计(6)是等价的.

模型(4)的约束也必须由模型(1)和(2)推出,例如

$$\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{b}\alpha_i\approx\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{k_i}\psi_{ij}^1=\frac{1}{n}1_n^{\mathrm{T}}\psi_1\approx E\psi_1=0,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{k_i}\psi_{ij}^l=\frac{1}{n}1_n^{\mathrm{T}}\psi_l\approx E\psi_l=0,l=2,\cdots,k.$$

上述区组因子的设计表 $D_{b\times k}^0(v_0)=(b_{ij}^0)$ 是根据实际试验情况确定的,无法进行设计.而试验因子的设计表 $D_{b\times k}^t(v_t)=(b_{ij}^t),t\geqslant 1$,是可以设计的.设计的目的是为了保证用相应的设计表获得试验数据,能够正确估计可观测函数 $g(x_0,x_1,\cdots,x_m)$ 的分解项 ψ_t 和方差 $Var(\psi_t)$ 等.因此要求考虑试验因子的设计表 $D_{b\times k}^t(v_t)=(b_{ij}^t),t\geqslant 1$ 的多种平衡性.

记试验因子 x_t 的水平 x 在区组设计表 $D_{b\times k}^t(v_t)=(b_{ij}^t),t\geqslant 1$,的第 i 个区组重复出现的次数为 $r_i^t(x)=|\{j:b_{ij}^t=x\}|$,又记不同试验因子 x_s,x_t 的水平组合 (x,y) 在区组设计 $D_{b\times k}^s(v_t)=(b_{ij}^s)$ 和 $D_{b\times k}^t(v_t)=(b_{ij}^t),t\geqslant 1$,的第 i 个区组重复出现的次数为 $r_i^{s,t}(x,y)=|\{j:(b_{ij}^s,b_{ij}^t)=(x,y)\}|$.再记区组因子 x_0 不同试验因子 $x_1,\cdots,x_m$ 的水平组合 $(y_1,\cdots,y_m)$ 在区组设计 $D_{b\times k}^t(v_t)=(b_{ij}^t),t\geqslant 1$,的第 i 个区组重复出现的次数为 $r_i^{1,2,\cdots,m}(i,y_1,\cdots,y_m)=|\{j:(b_{ij}^0=i,b_{ij}^1,\cdots,b_{ij}^m)=(i,y_1,\cdots,y_m)\}|$.

如果所有因子显著,那么试验因子的区组设计表 $D_{b\times k}^t(v_t)=(b_{ij}^t),t\geqslant 1$,的平衡性总体来讲只有一种,就是试验因子的对称置换不变性.也就是说,有如下广义对称表的定义,分解定理和构造方法.

定义 1(广义对称表) 如果选取行列设计表 $\boldsymbol{H}_n(b^1v_1^m)=[Vec(D_{b\times k}^0(b)),Vec(D_{b\times k}^1(v_1)),\cdots,Vec(D_{b\times k}^m(v_1))]$ 的任意行 $\alpha=(\alpha(0),\alpha(1),\cdots,\alpha(m))$,及其置换群 $G\subset S_m$ 的任意元素 $\sigma=(\sigma(1),\cdots,\sigma(m))$,那么置换 $\alpha\sigma=(\alpha(0),\alpha\sigma(1),\cdots,\alpha\sigma(m))$ 仍然是行列设计表 $\boldsymbol{H}_n(b^1v_1^m)$ 的某一行.此称为行列设计表 $\boldsymbol{H}_n(b^1v_1^m)=[Vec(D_{b\times k}^0(b)),Vec(D_{b\times k}^1(v_1)),\cdots,Vec(D_{b\times k}^m(v_1))]$ 试验因子的对称置换不变性.

在饱和正交幂等系统的帮助下,称具有试验因子的对称置换不变性的行列设计表 $\boldsymbol{H}_n(b^1v_1^m)$ 为关于群 G 的广义对称表,记为 $(S_n(b^1v_1^m);G)$,或者

$$S_n(b^1v_1^m)=[Vec(D_{b\times k}^0(b)),Vec(D_{b\times k}^1(v_1)),\cdots,Vec(D_{b\times k}^m(v_1))]=[a_0,a_1,\cdots,a_m].$$

本文暂时关注 $r_i^{1,2,\cdots,m}(i,y_1,\cdots,y_m)=|\{j:(b_{ij}^0=i,b_{ij}^1,\cdots,b_{ij}^m)=(i,y_1,\cdots,y_m)\}|\leqslant 1$ 的情况,也就是说,广义对称表的各个行互不相同.

注 1 由于广义对称表考虑 x_0 指标,可简记为 $\alpha\sigma=(\alpha(0),\alpha\sigma(1),\cdots,\alpha\sigma(m))\in S_n$.

定义 2(广义对称表的轨道) 设 $(S_n(b^1v_1^m);G)$ 为一个各个行互不相同的广义对称表,对于任意行向量 $\alpha\sigma=(\alpha(0),\alpha\sigma(1),\cdots,\alpha\sigma(m))\in S_n$,称集合 $S_n^{\alpha}=\{\boldsymbol{\alpha\sigma}=(\alpha(0),\alpha\sigma(1),\cdots,\alpha(m)):\sigma\in G\}$ 为 S_n 的一条轨道.

注 2 由广义对称表的定义 1 易知,S_n 的任何一条轨道也是一个广义对称表.

定义 3(广义对称表的轨道代表集) 广义对称表 $(S_n(b^1v_1^m);G)$ 的每条轨道上取一个元素 α 组成一个集合称为轨道代表集,记作 Δ.通常,代表元素选取是将轨道元素按字典序排列时的第一个元素.

定理 1 (广义对称表的分解定理)[23] 设 $(S_n(b^1v_1^m);G)$ 为一个各个行互不相同的广义对称表,当且

仅当广义对称表 S_n 可以分解成若干个互不相交轨道的并，即 $S_n = \bigcup_{\alpha\in\Delta} S_n^{\alpha}$. 根据广义对称表的分解定理 1，具有多个轨道的复杂广义对称表也可以很容易的被构造出来.

2　广义对称表的构造

构造广义对称表的方法有很多,本文给出一种利用广义对称表的分解定理 1 构造广义对称表的一种方法. 构造方法是:首先根据轨道代表元素分别构造出各个轨道,然后将构造出的各个轨道合并成一个矩阵形式的设计表.

例 1　如下形式的行列设计 $\boldsymbol{H}_4(2^1 3^3)$ 为关于子群 $G=\{e,\sigma,\sigma^2\}, \sigma=(1\ 2\ 3)\in S_3$ 的广义对称表 $(S_4(2^1 3^3);G)$.

$\boldsymbol{H}_4(2^1 3^3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. 相应的区组设计为 $\boldsymbol{D}^0_{2\times(1,3)^{\mathrm{T}}}(2^1) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{D}^1_{2\times(1,3)^{\mathrm{T}}}(3^1) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{D}^2_{2\times(1,3)^{\mathrm{T}}}(3^1) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{D}^3_{2\times(1,3)^{\mathrm{T}}}(3^1) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

事实上,取 $\alpha=(1,1,1,1)\in \boldsymbol{H}_4(2^1 3^3)$,对于任意子群 $G=\{e,\sigma,\sigma^2\},\sigma=(1\ 2\ 3)\in S_3$ 的元素 π,都有 $\alpha\pi=(1,1,1,1)\in \boldsymbol{H}_4(2^1 3^3)$,即轨道 $\boldsymbol{H}_4\ (2^1 3^3)^{\alpha=(1,1,1,1)} = \{(1,1,1,1)\}$.

取 $\alpha=(2,1,2,3)\in \boldsymbol{H}_4(2^1;3^3)$,对于任意子群 $G=\{e,\sigma,\sigma^2\}$, $\sigma=(1\ 2\ 3)\in S_3$ 的元素 π,都有 $\alpha\pi=(2,1,2,3)\in \boldsymbol{H}_4(2^1 3^3), \pi=e$; $\alpha\pi=(2,2,3,1)\in \boldsymbol{H}_4(2^1 3^3),\pi=\sigma$; $\alpha\pi=(2,3,1,2)\in \boldsymbol{H}_4(2^1 3^3),\pi=\sigma^2$; 即轨道 $\boldsymbol{H}_4\ (2^1 3^3)^{\alpha=(2,1,2,3)} = \{(2,1,2,3),(2,2,3,1),(2,3,1,2)\}$.

根据广义对称表的分解定理 1,设计表 $\boldsymbol{H}_4(2^1 3^3) = \boldsymbol{H}_4\ (2^1 3^3)^{\alpha=(1,1,1,1)} \cup \boldsymbol{H}_4\ (2^1 3^3)^{\alpha=(2,1,2,3)}$ 是关于子群 $G=\{e,\sigma,\sigma^2\},\sigma=(1\ 2\ 3)\in S_3$ 的广义对称表 $(S_4(2^1 3^3);G)$.

子群 $G=\{e,\sigma,\sigma^2\},\sigma=(1\ 2\ 3)\in S_3$ 的乘法表为 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. 关于此群的饱和正交幂等系统或者对称算符表存在两个[3],形式为 (1)　$\{x_1,x_2\}$: $x_1=I_{\{1\}}+I_{\{2,3\}}$, $x_2=2I_{\{1\}}-I_{\{2,3\}}$. (2)　$\{x_1,x_2,x_3\}$: $x_1 = I_{\{1\}}+I_{\{2\}}+I_{\{3\}}$, $x_2=I_{\{1\}}+\omega I_{\{2\}}+\bar{\omega} I_{\{3\}}$, $x_3=I_{\{1\}}+\bar{\omega} I_{\{2\}}+\omega I_{\{3\}}$. $\omega=\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

例 2　如下形式的行列设计 $\boldsymbol{H}_4(2^1 2^3)$ 为关于子群 $G=\{e,\sigma,\sigma^2\},\sigma=(1\ 2\ 3)\in S_3$ 的广义对称表 $(S_4(2^1 2^3);G)$.

$\boldsymbol{H}_4(2^1 2^3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. 相应的区组设计为 $\boldsymbol{D}^0_{2\times(1,3)^{\mathrm{T}}}(2^1) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{D}^1_{2\times(1,3)^{\mathrm{T}}}(2^1) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{D}^2_{2\times(1,3)^{\mathrm{T}}}(2^1) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{D}^3_{2\times(1,3)^{\mathrm{T}}}(2^1) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

事实上,取 $\alpha=(1,1,1,1)\in \boldsymbol{H}_4(2^1 2^3)$,对于任意子群 $G=\{e,\sigma,\sigma^2\},\sigma=(1\ 2\ 3)\in S_3$ 的元素 π,都有 $\alpha\pi=(1,1,1,1)\in \boldsymbol{H}_4(2^1 3^3)$. 即轨道 $\boldsymbol{H}_4\ (2^1 2^3)^{\alpha=(1,1,1,1)} = \{(1,1,1,1)\}$.

取 $\alpha=(2,1,2,2)\in \boldsymbol{H}_4(2^1 2^3)$,对于任意子群 $G=\{e,\sigma,\sigma^2\},\sigma=(1\ 2\ 3)\in S_3$ 的元素 π,都有 $\alpha\pi = (2,1,2,2)\in \boldsymbol{H}_4(2^1 2^3),\pi=e$; $\alpha\pi=(2,2,2,1)\in \boldsymbol{H}_4(2^1 2^3),\pi=\sigma$; $\alpha\pi=(2,2,1,2)\in \boldsymbol{H}_4(2^1 2^3),\pi=\sigma^2$. 即轨道 $\boldsymbol{H}_4\ (2^1 2^3)^{\alpha=(2,1,2,2)} = \{(2,1,2,2),(2,2,2,1),(2,2,1,2)\}$.

根据广义对称表的分解定理 1,设计表 $\boldsymbol{H}_4(2^1 2^3) = \boldsymbol{H}_4\ (2^1 2^3)^{\alpha=(1,1,1,1)} \cup \boldsymbol{H}_4\ (2^1 2^3)^{\alpha=(2,1,2,2)}$ 关于子群 $G=\{e,\sigma,\sigma^2\},\sigma=(1\ 23)\in S_3$ 广义对称表 $(S_4(2^1 2^3);G)$.

子群 $G=\{e,\sigma,\sigma^2\}$,$\sigma=(1\ 2\ 3)\in S_3$ 的乘法表为 $\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{bmatrix}$. 关于此群的饱和正交幂等系统或者对称算符表存在两个[3],形式为 (1) $\{x_1,x_2\}:x_1=I_{\{1\}}+I_{\{2,3\}}$, $x_2=2I_{\{1\}}-I_{\{2,3\}}$. (2) $\{x_1,x_2,x_3\}:x_1=I_{\{1\}}+I_{\{2\}}+I_{\{3\}}$, $x_2=I_{\{1\}}+\omega I_{\{2\}}+\bar{\omega}I_{\{3\}}$, $x_3=I_{\{1\}}+\bar{\omega}I_{\{2\}}+\omega I_{\{3\}}$. $\omega=\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

例 3 如下形式的行列设计 $\boldsymbol{H}_9(3^1;3^4)$ 为关于子群 $G=\{e,(1234),(13)(24),(1432)\}\subset S_4$ 广义对称表 $(S_9(3^13^4);G)$.

$\boldsymbol{H}_9(3^13^4)=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\2&1&3&2&3\\2&3&2&3&1\\2&2&3&1&3\\2&3&1&3&2\\3&1&2&3&3\\3&2&3&3&1\\3&3&3&1&2\\3&3&1&2&3\end{bmatrix}$. 相应的区组设计为 $\boldsymbol{D}^0_{3\times(1,4,4)^{\mathrm{T}}}(3^1)=\begin{bmatrix}1&&&\\2&2&2&2\\3&3&3&3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{D}^1_{3\times(1,4,4)^{\mathrm{T}}}(3^1)=\begin{bmatrix}1&&&\\1&3&2&3\\1&2&3&3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{D}^2_{3\times(1,4,4)^{\mathrm{T}}}(3^1)=\begin{bmatrix}1&&&\\3&2&3&1\\2&3&3&1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{D}^3_{3\times(1,4,4)^{\mathrm{T}}}(3^1)=\begin{bmatrix}1&&&\\2&3&1&3\\3&3&1&2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{D}^4_{3\times(1,4,4)^{\mathrm{T}}}(3^1)=\begin{bmatrix}1&&&\\3&1&3&2\\3&1&2&3\end{bmatrix}$.

事实上,取 $\alpha=(1,1,1,1)\in\boldsymbol{H}_9(3^13^4)$,对于任意子群 $G=\{e,(1234),(13)(24),(1432)\}\subset S_4$ 的元素 π,都有 $\alpha=(1,1,1,1)\in\boldsymbol{H}_9(3^13^4)$. 即轨道 $\boldsymbol{H}_9(3^13^4)^{\alpha=(1,1,1,1,1)}=\{(1,1,1,1,1)\}$.

取 $\alpha=(2,1,3,2,3)\in H_9(3^1;3^4)$,对于任意子群 $G=\{e,(1234),(13)(24),(1432)\}\subset S_4$ 的元素 π,都有 $\alpha\pi=(2,1,3,2,3)\in\boldsymbol{H}_9(3^13^4),\pi=e$; $\alpha\pi=(2,3,2,3,1)\in\boldsymbol{H}_9(3^13^4),\pi=(1234)$; $\alpha\pi=(2,2,3,1,3)\in\boldsymbol{H}_9(3^13^4),\pi=(13)(24)$; $\alpha\pi=(2,,3,1,3,2)\in\boldsymbol{H}_9(3^13^4),\pi=(1432)$. 即轨道 $\boldsymbol{H}_9(3^13^4)^{\alpha=(2,1,3,2,3)}=\{(2,1,3,2,3),(2,3,2,3,1),(2,2,3,1,3),(2,3,1,3,2)\}$.

取 $\alpha=(3,1,2,3,3)\in\boldsymbol{H}_9(3^1;3^4)$,对于任意子群 $G=\{e,(1234),(13)(24),(1432)\}\subset S_4$ 的元素 π,都有 $\alpha\pi=(3,1,2,3,3)\in\boldsymbol{H}_9(3^13^4),\pi=e$; $\alpha\pi=(3,2,3,3,1)\in\boldsymbol{H}_9(3^13^4),\pi=(1234)$; $\alpha\pi=(3,3,3,1,2)\in\boldsymbol{H}_9(3^13^4),\pi=(13)(24)$; $\alpha\pi=(3,3,1,2,3)\in\boldsymbol{H}_9(3^13^4),\pi=(1432)$. 即轨道 $\boldsymbol{H}_9(3^13^4)^{\alpha=(3,1,2,3,3)}=\{(3,1,2,3,3),(3,2,3,3,1),(3,3,3,1,2),(3,3,1,2,3)\}$.

根据广义对称表的分解定理 1,设计表

$$\boldsymbol{H}_9(3^13^4)=\boldsymbol{H}_9(3^13^4)^{\alpha=(1,1,1,1,1)}\cup\boldsymbol{H}_9(3^13^4)^{\alpha=(2,1,3,2,3)}\cup\boldsymbol{H}_9(3^13^4)^{\alpha=(3,1,2,3,3)}$$

为关于子群 $G=\{e,(1234),(13)(24),(1432)\}\subset S_4$ 的广义对称表 $(S_9(3^13^4);G)$.

子群 $G=\{e,(1234),(13)(24),(1432)\}\subset S_4$ 的乘法表为 $\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{bmatrix}$. 关于此群的饱和正交幂等系统或者对称算符表存在四个[3],形式为

(1) $\{x_1,x_2\}:x_1=I_{\{1\}}+I_{\{2,3,4\}}$, $x_2=3I_{\{1\}}-I_{\{2,3,4\}}$.

(2) $\{x_1,x_2\}:x_1=2I_{\{1\}}+2I_{\{3\}}+0I_{\{2,4\}}$, $x_2=2I_{\{1\}}-2I_{\{3\}}+0I_{\{2,4\}}$.

(3) $\{x_1,x_2,x_3\}$:$x_1=I_{\{1\}}+I_{\{3\}}+I_{\{2,4\}}$, $x_2=I_{\{1\}}+I_{\{3\}}-I_{\{2,4\}}$, $x_3=2I_{\{1\}}-2I_{\{3\}}-0I_{\{2,4\}}$.

(4) $\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$:$x_1=I_{\{1\}}+I_{\{2\}}+I_{\{3\}}+I_{\{4\}}$, $x_2=I_{\{1\}}-iI_{\{2\}}-I_{\{3\}}+iI_{\{4\}}$, $x_3=I_{\{1\}}+iI_{\{2\}}-I_{\{3\}}-iI_{\{4\}}$, $x_3=I_{\{1\}}-I_{\{2\}}+I_{\{3\}}-I_{\{4\}}$.

3　广义对称表的哲学意义

平衡性是中国古典传统文化的核心概念之一.研究平衡性势必涉及中国古典传统文化——阴阳五行.可以证明:任何复杂系统如果具有平衡稳定性,那么其子系统必然可以分成五类,在每一类的内部可以视作等价的,而各类之间存在着邻相生间相克关系. 如果把相生理解为广义的对称,而把相克理解为广义的正交,那么阴阳五行的相克相生的概念就是广义的正交表[30]和广义的对称表的概念.因此广义正交表和广义对称表的数据分析及其构造,实际上就是阴阳五行的相克相生的数据分析及其构造.这样广义正交表和广义对称表的研究成功就从数学上解决了中国古典传统文化——阴阳五行的理论结构问题.

中国古典传统文化有一个名言:五行在五行中.也就是说人们仅仅只可能认识到一个层面的五行,往小处看每一行之中具有新的五行,往大处看每一个五行系统又受着更大五行系统的制约.因而从宏观的层面上来讲,广义正交表的五种平衡性[30](相遇平衡性、水平间平衡性、正交平衡性、水平内平衡性和整体平衡性)仅仅在试验因子中存在不显著的因子或者交互作用时,才会显示出它的作用.因此称它是研究正交分解(相克)问题的平衡性.而在试验因子都显著时,就不得不考虑广义对称平衡性,即对称置换平衡性.也就是说不得不考虑广义对称表的数据分析及其构造.通过对不同的对称算符组成的正交幂等系统构造,并应用于对不同对称分解项的估计,这样就可以从不同的角度找到不显著的对称分解项,将不显著的对称分解项,采用方差分析方法或者贡献率分析方法将其排除,就可以得到理想的平衡稳定的复杂系统了.

即使得到了平衡稳定的复杂系统,也只是在试验因子的层面解决了平衡稳定性问题,也就是说仅仅解决了行列设计表的列关系的平衡稳定性问题.而行列设计表行关系的平衡稳定性问题还没有解决.为了研究行列设计表的行关系,就不得不关注复杂系统的能量(俗称“气”)变化,因为行列设计表的行关系变化就是能量的起伏变化.关注复杂系统的能量变化,就不得不涉及复杂系统的五脏六腑;关注复杂系统的五脏六腑,就不得不涉及易经的 64 卦和 8 宫;关注易经的 64 卦和 8 宫,就不得不涉及天干地支;关注天干地支,就不得不涉及五运六气;关注五运六气,就不得不涉及六十甲子,如此等等.因此,我们说:广义对称表是在广义正交表基础上的进一步研究.如此说来,中国古典传统文化——阴阳五行的理论结构就变成了奇妙的数学问题了.

4　结论

本文提出了广义对称表的定义,阐述了对称置换平衡性的概念,并给出了广义对称表一种构造方法.广义对称表与广义正交表一样,都与中国古典传统文化有关.而广义对称表与中国古典传统文化的关系最为密切,研究广义对称表与研究中国古典传统文化的问题基本相当.本系列论文将以研究广义对称表理论和应用为重要目的.

参 考 文 献

[1] 王佳利,王改霞,郑祥. 群与图的对称性[J]. 纯粹数学与应用数学, 2015, 31(4): 367-372.

[2] 顾振华. 有限域上典型群定义的图的对称性[D]. 北京:中国科学院数学与系统科学研究院, 2009.

[3] 王志衡,宋沁峰,郝银星,等. 有限域上典的图的对称性[D]. 北京:中国科学院数学与系统科学研究院, 2009.

[4] 杨大伟. 图的对称性和容错性分析[D]. 北京:北京交通大学, 2016.

[5] 王牟江山. 对称群上 Cayley 图网络的容错性[D]. 北京:中国科学院大学, 2014.

[6] 向德辉. 基于对称性与图割的医学图像分割及可视化算法研究[D]. 北京:中国科学院研究生院, 2012.

[7] 周进鑫. 图的对称性与曲面嵌入[D]. 北京:北京交通大学,2008.

[8] Gordon James. 群的表示和特征标[M]. 2 版. 杨义川. 译. 北京:科学出版社,2017.

[9] 刘洋. 特征标理论和李型有限群的表示[D]. 北京:清华大学,2014.

[10] 徐海静. 群的特征标性质与群的结构研究[D]. 重庆:西南大学,2011.

[11] 贺艳妮. 若干低阶群的特征标表[D]. 成都:成都理工大学,2011.

[12] 司华斌. 有限群上的特征标对应关系[D]. 厦门:厦门大学,2009.

[13] 孙明保,张映辉,张再云,等.一类对称函数的 Schur 凸性及其应用[J]. 数学年刊 A 辑(中文版), 2017,(2): 177-190.

[14] 孙明保. 两类对称函数的 Schur 凸性[J]. 中国科学(数学), 2014,(6): 633-656.

[15] 张应山. 多边矩阵理论[M]. 北京: 中国统计出版社,1993.

[16] Zhang Yingshan, Pang Shanqi, Jiao Zhengming. Group partition and systems of orthogonal idempotents[J]. Linear Algebra and its Applications, 1998, 78: 249-262.

[17] 潘长缘, 陈雪平, 张应山. 正交幂等系统的构造[J]. 华东师范大学学报(自然科学版),2008, 141(5):51-58,65.

[18] 陈雪平,潘长缘,张应山. 多元函数空间的对称分解[J]. 数学的实践与认识, 2009,39(2):167-173.

[19] 潘长缘,马海南,陈雪平. 对称性全局统计分析中的定理证明[J]. 华东师范大学学报 (自然科学版), 2009,142(5):127-137.

[20] Luo Chun, Zhang Yingshan. Symmetrical design of experiment in global sensitivity analysis based on ANOVA high-dimensional model representation[J]. Communications in Statistics-Simulation and Computation, 2016, 45:48-72.

[21] 罗纯,张应山. 框架定义及其剖分定理——处理复杂系统的新思维系列之一[J]. 上海应用技术学院学报,2010, 10(2):109-114.

[22] 罗纯,张应山. 框架与正交表——处理复杂系统的新思维系列之二[J]. 上海应用技术学院学报,2010, 10(2):159-163.

[23] 罗纯, 钱洪岗, 张应山. 对称框架的定义及分解——处理复杂系统的新思维系列之五[J]. 上海应用技术学院学报(自然科学版), 2011, 11(1):64-67.

[24] 刘兴虎,罗纯,张应山. 对称框架轨道的特征——处理复杂系统的新思维系列之六[J]. 上海应用技术学院学报(自然科学版),2011, 11(1):68-72.

[25] 罗纯, 陈志琴,张应山. 对称框架轨道的群表示——处理复杂系统的新思维系列之七[J]. 上海应用技术学院学报(自然科学版), 2011,11(2):159-163.

[26] 罗纯, 张晓丽,张应山. 对称框架同构类的计数——处理复杂系统的新思维系列之八[J]. 上海应用技术学院学报(自然科学版), 2011, 11(3):253-257.

[27] 罗纯,刘兴虎,张应山. 对称框架与框架的笛卡尔积运算——处理复杂系统的新思维系列之十[J]. 上海应用技术学院学报(自然科学版), 2012,12(1): 77-80.

[28] 钱洪岗. 对称设计的构造及应用[D]. 上海:华东师范大学, 2012.

[29] 刘兴虎. 基于同构对称框架的对称分析[D]. 上海:华东师范大学, 2012.

[30] Zhang Yingshan . Non-authigenic logic-mathematical reasoning of statistical intervening principle based on Yin Yang Wu Xing theory in traditional Chinese statistics (I)[J]. International Journal of Engineering and Technical Research, 2018, 8(1): 309-335

Definition of Generalized Symmetric Array and Philosophical Significance

ZHANG Ying-shan[1] ZHAO Jian-li[2]

(1. School of Statistics, Faculty of Economics and Management, East China Normal University, Shanghai, 200241,China;
2. School of Mathematical Sciences, Liaocheng University,Liaocheng, 252059,China)

Abstract This series of articles based on "multilateral matrix theory", inspired by the Eastern holistic thinking by trying to provide and improve a whole complex system to handle symmetrical multi-target problems, symmetrical non-uniformity problems, symmetrical nonlinear problems, a powerful mathematical tool from Global to Local issues and its rigorous theoretical analysis and proof. Generalized symmetry or generalized symmetry analysis method is one of the concerns in the study of generalized symmetry of the problem, the structure for a symmetrical array is the basis of generalized symmetry problem. As the first series of papers, in this paper, using the free function model, according to the orthogonal idempotent system, adopting the symmetrical permutation invariability as a balance index, both the definition and the philosophical meaning of generalized symmetrical arrays are discussed from philosophical level.

Key words generalized symmetrical arrays; orthogonal idempotent systems; free function models; the symmetrical displacement invariability; symmetrical matrix images